分类号：　　　　　　　　　　　　　　　　单位代码：

密　级：　　　　　　　　　　　　　　　　学　　号：

浙江大學

博士学位论文

中文论文题目：胡塞尔的数学现象学研究

——从形式建构到直观构造

英文论文题目：**Husserl's Phenomenology of Mathematics**

——From Formal Construction to Intuitive Constitution

申请人姓名：于宝山

指 导 教 师：倪梁康

专 业 名 称：外国哲学

研 究 方 向：现象学、数学哲学

所 在 学 院：哲学学院

论文提交日期：2025 年 5 月

胡塞尔的数学现象学研究

——从形式建构到直观构造

论文作者签名：于宏山

指导教师签名：倪梁康

论文评阅人 1：隐名评阅

评阅人 2：隐名评阅

评阅人 3：隐名评阅

评阅人 4：隐名评阅

评阅人 5：隐名评阅

答辩委员会主席：李朝东 教授 西北师范大学哲学与社会学院

委员 1：张 伟 教授 中山大学哲学系

委员 2：庞学铨 教授 浙江大学哲学学院

委员 3：杨大春 教授 浙江大学哲学学院

委员 4：李忠伟 长聘副教授 浙江大学哲学学院

委员 5：王宏健 研究员 浙江大学哲学学院

答辩日期：2025 年 5 月 9 日

Husserl's Phenomenology of Mathematics
——From Formal Construction to Intuitive Constitution

Author's signature: 于孟山

Supervisor's signature: 倪梁康

Thesis reviewer 1: **Anonymous**

Thesis reviewer 2: **Anonymous**

Thesis reviewer 3: **Anonymous**

Thesis reviewer 4: **Anonymous**

Thesis reviewer 5: **Anonymous**

Chair: Professor Chaodong Li
(Committee of oral defence)

Committeeman 1: Professor Wei Zhang

Committeeman 2: Professor Xuequan Pang

Committeeman 3: Professor Dachun Yang

Committeeman 4: Professor Zhongwei Li

Committeeman 5: Researcher Hongjian Wang

Date of oral defence: 2025. 5. 9

浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 **浙江大学** 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：于宝山　　　　签字日期：2025 年 6 月 6 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 浙江大学 有权保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 浙江大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：于宝山　　　　导师签名：倪学康

签字日期：2025 年 6 月 6 日　　　　签字日期：2025 年 6 月 6 日

摘 要

现象学的数学认识论在当前的研究中一直未被充分重视。胡塞尔的数学现象学可以通过形式建构与直观构造的双重进路展开：（1）分析胡塞尔算术哲学中的思想张力结构，以及它在数学基础发展中的哲学根源；（2）运用超越论现象学的直观构造理论，重新处理胡塞尔早期未完成的数学问题，对现象学视域中的数学认识论问题进行统一的解读。（3）通过超越论现象学的数学认识论，对数学哲学中直觉主义与形式主义之间关于数学对象的本体论争论提供一种数学现象学的解释方案。

对于第一个问题，首先将胡塞尔的数学哲学推进到其博士论题中的变分法研究，比较了变分（Variation）计算的极值求解与想象变更（Variation）的本质直观在操作方法上的相似性。其次，阐明了胡塞尔在微积分的形而上学问题争议中对数概念的直观起源研究。最后，通过分析胡塞尔关于本真数的概念构造系统与非本真数的符号定义系统，以及关于虚数解释的相对限定性与绝对限定性的两种流形论之间的不对称性关系。可以发现，胡塞尔早期数学哲学中存在着直观构造与形式建构的张力结构。这种张力结构隐含在胡塞尔数学背景中柏林数学学派与哥廷根数学学派之间的认识论不对称性：一方面是魏尔斯特拉斯、克罗内克的分析算术化引起的数概念的直观构造，另一方面是希尔伯特的几何公理化运动导向的形式化公理建构。

对于第二个问题，在形式建构和直观构造的张力结构基础上，讨论了三种范畴对象的本质类型和直观模式，分析了范畴直观的对象直观侧的单向奠基性定义与意义充实侧的分节的相合性的两种定义，阐明了范畴直观与感性直观之间的类比论证问题。在此基础上，从第二种范畴直观定义出发讨论了以无感性内容、全时性、无对象性为特征的数学对象的范畴直观，提出了基于范畴充实的分节行为与意向性相合的数学直观。最后认为，数学对象的范畴直观完全是在意义领域内进行的，而不会超越到对象领域。

对于第二个问题，在数学对象的范畴直观的基础上继续讨论了数学对象的超越论构造。首先比较了三种不同的数学构造类型：基于感性直观的理想化的数学对象、可被范畴直观所把握的数学形式对象、由公理系统所建构的一致性的但无法范畴直观的数学对象，比如康托尔的超限数。然后分析了胡塞尔基于意向性之链和“如此等等”的构造模式对自然数和潜无限的构造，进一步讨论了贝克尔基于线性反思的迭代序列

与视域层级的嵌套结构对超限序数的本体论辩护。最后通过胡塞尔和贝克尔对潜无限和超限数的超越论构造，为直觉主义（有限性的可判定性构造）和形式主义（无限性的非矛盾性建构）之间关于数学对象的存在问题提供了一种现象学的解释方案。

对于第三个问题，在数学对象的范畴直观和超越论构造的基础上，对数学直觉主义与形式主义的直观理论进行了现象学的比较与阐释。一方面，希尔伯特在元数学中引入了康德的直观理论，提出了一种先于逻辑与运算的数学直观，认为形式数学的有效性最终由“具体笔画符号的纯粹直观基础”所保证。这种元数学的直观理论引发了新康德主义学派和现象学传统中对语义指称与潜无限归纳难题的批评和回应。最后，为了解决元数学的直观问题，引入了当前 Parsons 基于现象学的范畴直观与想象理论所提出的构型—类型（token-type）的数学直观方案，从而构建了满足皮亚诺公理的自然数的构型—类型，获得了算术中的直观模型。另一方面，本文通过内时间意识和意向充实理论，对数学直觉主义中数学对象的构造和逻辑命题的证明进行了现象学解释。首先比较了布劳威尔的二一性（原印象—滞留）时间意识结构与胡塞尔的三一性（前摄—原印象—滞留）的内时间意识结构，并解释了胡塞尔的基数构造与布劳威尔的序数构造的不同进路。其次讨论了布劳威尔的学生海廷在 BHK 解释中，通过贝克尔接受和发展了不同于排中律的数学命题的意向充实理论。最后分析了在胡塞尔的超越论逻辑中，直觉主义是按照真理逻辑进行的，而形式主义则是按照无矛盾性逻辑进行的。

对于第三个问题，从数学对象的超越论构造解释转向存在论解释。直觉主义与形式主义的认识论对立植根于亚里士多德—康德的批判数学哲学与柏拉图—莱布尼茨的数学神秘学传统。根据贝克尔，数（Zahl）与时间（Zeit）的关系表明，两种数学认识论的对立根本上源于对生活本身的人类学理解与绝对认识的观念论之间的矛盾。数学作为此在的实际生活的存在方式，数学现象不仅是纯粹意识的一种形式结构，而是此在的具体的、历史性的时间现象。贝克尔认为数学对象的意识构造和人类学解释并不能完全解释符号数学与自然结构之间的一致性问题，他基于柏拉图—莱布尼茨的神秘学传统，提出了数学符号的“预示”现象学。最后讨论了曼科对数学实存的人类学解释和预示现象学的神秘性主张的批评，通过胡塞尔的理性目的论，对预示现象学的神秘性进行了认识论的补充解释。

关 键 词：现象学；形式主义；直觉主义；形式建构；直观构造

Abstract

Husserl's phenomenology as an epistemology of mathematics has not received adequate attention. The potential of a phenomenology of mathematics is revealed through two paths: the formal construction and the intuitive constitution, achieved by addressing three sub-problems: (1) Analyzing structural tensions in Husserl's philosophy of arithmetic and their philosophical roots within mathematical foundations; (2) Reinterpreting Husserl's unresolved issues in early mathematics regarding intuition and constitution through a transcendental framework, to offer a unified phenomenological account; (3) Offering a phenomenological explanation, grounded in transcendental epistemology, for the ontological debate between intuitionism and formalism regarding mathematical objects.

Regarding (1), I trace Husserl's philosophy of to his doctoral work on variational calculus, comparing the solution of extrema with the Wesensschau of imaginative variation in their operational similarities. It also clarifies Husserl's analysis of the intuitive origins of the concept of number in his metaphysical debates on the foundations of calculus. Finally, by examining the asymmetry between the conceptual system of authentic numbers and the symbolic system of inauthentic numbers, along with the absolutized and relativized theories of definiteness in the interpretation of imaginary numbers, it reveals a structural tension between intuitive constitution and formal construction in Husserl's early philosophy of mathematics. This tension arises from the epistemological divide between the Berlin School's arithmetization (Weierstrass/Kronecker) and the Göttingen School's axiomatization (Hilbert).

Regarding (2), I examine three essential categorial types through their correlative modes of givenness, based on the tension between formal construction and intuitive constitution. Our analysis contrasts two definitions: 1) the foundation of unidirectionality in object-intuition, and 2) the coinciding unity of articulation (Deckungseinheit der Gliederung) in meaning-fulfillment. This clarifies analogical relations between categorial and sensuous intuition. Building on this, Building upon this foundation, starting from the second definition of categorial intuition, we examine the categorial intuition of mathematical objects characterized by non-sensuous content, omnitemporality, and objectlessness. We propose a mathematical intuition grounded in categorical fulfillment through articulated acts harmonized with intentional congruence. Mathematical intuition operates entirely within the domain of meaning and does not transcend into the domain of objects.

Regarding (2), I further advance the transcendental constitution of mathematical objects based on their categorial intuition. First, we compare three distinct types of mathematical constructions: mathematical objects idealized through sensuous intuition, formal mathematical objects apprehensible via categorial intuition, and consistency-constructed but not accessible to categorial intuition, such as Cantor's transfinite numbers. Next, we analyze Husserl's model of constituting natural numbers and potential infinity through the intentional chain and the "and-so-forth" pattern, and discuss Oskar Becker's ontological justification of transfinite ordinals via linear reflection and hierarchical nesting structures of horizons. Finally, by leveraging Husserl's and Becker's transcendental constitutions of potential infinity and transfinite numbers, we propose a phenomenological framework to reconcile the debate between intuitionism (finite decidable constitution) and formalism (infinite non-contradictory construction) regarding the nature of mathematical objects.

Regarding (3), I provide a phenomenological comparison and interpretation of mathematical intuitionism and formalist theories of intuition, grounded in the categorial intuition and transcendental constitution of mathematical objects. On one hand, Hilbert introduced Kantian intuitive theory into metamathematics, proposing a pre-logical mathematical intuition that precedes formal logic and operations. He asserted that the validity of formal mathematics ultimately rests on "a pure intuitive foundation of concrete stroke-signs."This metamathematical intuitive theory has drawn critiques and responses from the Neo-Kantian school and phenomenological tradition regarding semantic reference and the challenge of potential infinite induction. To address these issues in metamathematical intuition, we adopt Charles Parsons' token-type theory, a mathematical intuitive framework rooted in Husserl' categorial intuition and imaginative variation, which constructs token-type structures that satisfy Peano axioms, thereby establishing an intuitive model in arithmetic. On the other hand, this study offers a phenomenological interpretation of mathematical object construction and logical proposition verification in intuitionism through the lens of inner time-consciousness and intentional fulfillment. First, we compares Brouwer's twonity time-consciousness structure (primal impression-retention) with Husserl's trinity structure (protention-primal impression-retention), explaining their divergent approaches to constructing cardinal versus ordinal numbers. Second, we analyze how Heyting's BHK interpretation formalizes intuitionist logic by incorporating Becker's theory of intentional fulfillment, which rejects the law of excluded middle. Finally, we demonstrate that within

Husserl’s transcendental logic:Intuitionism operates according to truth-logic (grounded in temporally constituted objects); Formalism adheres to consistency-logic (validated under phenomenological reduction).

Regarding (3), I shift from the transcendental-constitutional explanation of mathematical objects to an ontological interpretation. The epistemological opposition between intuitionism and formalism is rooted in the conflict between the Aristotelian-Kantian critical philosophy of mathematics and the Platonic-Leibnizian tradition of mathematical mysticism. According to Becker, the relationship between number (Zahl) and time (Zeit) reveals that this epistemological clash fundamentally stems from the tension between an anthropological understanding of life itself (Dasein’s factical existence) and the idealism of absolute knowledge. As a mode of Dasein’s actual being-in-the-world, mathematical phenomena are not merely formal structures of pure consciousness but concrete, historically situated temporal phenomena. Becker argues that neither consciousness-based constitution nor anthropological explanations can fully account for the correspondence between symbolic mathematics and natural structures. Drawing on the Platonic-Leibnizian mystical tradition, he proposes a prognostic phenomenology (mantische Phänomenologie) of mathematical symbols, which anticipates truths through pre-thematic temporal horizons. Finally, the study addresses Mahnke’s critique of the anthropological interpretation of mathematical existence and the mysticism inherent in prognostic phenomenology. Through Husserl’s teleology of reason, it offers an epistemological interpretation to the mystical dimensions of Becker’s prognostic phenomenology.

Keywords: Phenomenology, Formalism, Intuitionism, Formal Construction, Intuitive Constitution

凡例

本文引用胡塞尔全集（Huasserliana）将按如下格式引用不同类别的卷集，其中卷号使用罗马数字，页码则使用阿拉伯数字：引胡塞尔著作集（Gesammelte Werke）仅标注 Hua+卷数+页码；引胡塞尔资料集（Materialien）仅标注 Mat+卷数+页码；引胡塞尔文献集（Dokumente)中的《胡塞尔年谱》(Husserl-Chronik)和《胡塞尔书信集》(Briefweschsel)仅标注 Chronik+页码、标注信件时间+Brief+卷数+页码(如 Brief. IV, S.1)；引经兰德格雷贝整理的胡塞尔遗著《经验与判断》仅标注 EU+页码。（具体信息见参考文献部分）。

本文在引用贝克尔的著作时，在首次出现时给出文献完整信息，此后将根据其著作名称的字母缩写引用：

BG: Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendung.

ME: Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie der mathematischen Phänomene.

本文在引用布劳威尔的作品时，在首次出现时给出文献完整信息，此后将根据其全集著作名称的字母缩写引用：

CW: L.E.J. Brouwer. Collected works I. Philosophy and Foundations of Mathematics.

本文在引用希尔伯特的作品时，首次出现时给出文献完整信息，此后将根据其著作名称的字母缩写引用：

NM: Neubegründung der Mathematik, Erste Mitteilung.

UN: Über das Unendliche.

文中引文由笔者根据原文统一译出。

目 录

第 1 章 引论

我的现象学之路本质上是由普遍数学决定的。[1]

——胡塞尔

我没有找到时间和宁静来将这些数学—逻辑学的思想系列完全贯彻到底，因为超越论现象学的建构对我来说必定是更重要的。[2]

——胡塞尔

1.1 选题的意义背景：现象学的数学和数学的现象学

本文的目的是分析胡塞尔现象学在数学基础争论中的根源和背景，运用后期超越论现象学的本质直观和构造理论，重新讨论和处理胡塞尔早期未完成的数学哲学问题，从而探究和发展一门现象学的数学认识论。同时，将胡塞尔现象学置于二十世纪数学哲学的框架之中，对数学直觉主义与形式主义之间的数学基础争论问题给出一种数学现象学的解释。[3]

从现象学的认识论观点看，胡塞尔认为数学和现象学之间具有三种关系：（a）数学的现象学：胡塞尔认为通过哲学历史的反思，我们会发现数学基础理论以一种基本的、决定性的方式影响到重要哲学思想的形成。[4](b）数学与现象学：在超越论现象学的成熟时期，胡塞尔认为数学和现象学分别是两种不同类型的科学，应该具有不同类型的知识和方法，尤其是精确性与严格性的区分。[5] (c) 现象学的数学：胡塞尔认为，超越论现象学的意识构造理论具有为包括数学在内的一切本质科学进行奠基的任务。[6]其中（c1）是弱相关主义：胡塞尔认为数学家不需要澄清数学对象的客观有效性的意义、界限和来源，而哲学家则需要探询数学认识如何可能的有效性问题，但不以修改

[1] Hua V, S. 59.
[2] Brief.VII, S. 125.
[3] 在本文的论域中，对现象学与逻辑主义之间的关系不再做进一步的论述研究，具体可参见 1.2.3 节。
[4] Hua XII, S. 289.
[5] 胡塞尔在 Hua III/1, §71 & §75 对此进行了论述，并在 Hua III/1, §24 区分了数学的精确性与哲学的严格性。相似的论述还可见康德:《纯粹理性批判(第 2 版)》(康德著作全集第 3 卷)，李秋零译，北京:中国人民大学出版社，2004 年，第 460-467 页（B741-753）。
[6] Hua IX, S. 277–301.大英百科全书第四版关于现象学的词条。

数学基础原则为其动机；[1]而（c2）则是一种强相关主义，认为超越论现象学的认识论可以进行数学实践。例如海廷在对直觉主义形式的过程中对现象学的意向充实理论的应用，以及哥德尔对胡塞尔现象学资源的利用，我们将在后文中展开论述这一点。[2]

胡塞尔的数学兴趣并不在于分析技术和逻辑操作方面，而是在于对数学基础的认识论反思。在哲学传统中，作为所有知识的基础，对数学知识的认识论可能性的澄清一直是对任何认识论之有效性进行辩护的试金石。如果现象学不能对数学知识的可能性进行辩护，那么胡塞尔的认识论现象学为知识奠基的系统性建构就是无效和失败的。

1.1.1 十九世纪数学基础发展中的胡塞尔数学哲学

胡塞尔在攻读博士学位期间，师从柏林数学学派的魏尔斯特拉斯与克罗内克。自 1886 年至 1901 年，他在哈勒大学任教，与康托尔保持着密切的学术与私人往来。此后在 1901 年至 1915 年间，他在哥廷根的学术生涯中与希尔伯特学派持续交流，使他得以处身地参与了数学基础图景的深刻变革：从十九世纪末的分析的算术化运动到二十世纪初的几何的公理化运动。[3]

1) 柏林数学学派的分析的算术化运动：数的直观与概念的起源

微积分的基础问题起源于希腊人对无理数的几何直观方式的解释。毕达哥拉斯学派发现无理数的不可共度性问题之后，由柏拉图的学生欧多克斯采用几何量的长度之比得以解释，但是无理数的这种几何直观解释并没有解决无理数存在的逻辑问题。17 世纪早期微积分的发展总是与感性直观中的几何面积或运动，速度、瞬时变化率解释伴随在一起，数学家依然沿用希腊数学的几何式认识路径建立微积分。因此到了 18 世纪，通过经验直观而来的连续性、无穷小量等微积分的基本概念的逻辑矛盾性开始出现，谈论“微积分的形而上学”问题成为一种风尚。[4]以莱布尼茨为代表的欧陆数学学派认为，同负数的平方根一样，微积分的无穷小量作为推理假设的虚构实体不需要形而上学的解释；而以牛顿为代表的英国数学学派则对微积分的无穷小量给出了前后不一致的三种数学解释，哲学家贝克莱对这种神秘解释进行了激烈的批评。[5]

[1] 埃德蒙德·胡塞尔：《逻辑学与认识论导论》，郑辟瑞译，商务印书馆，2016，第 204、453–454 页。

[2] 关于数学和现象学之间关系的进一步讨论可见 Van Atten, Mark.“Why Husserl Should Have Been a Strong Revisionist in Mathematics.” *Husserl Studies,* vol. 18, no. 1, 2002, pp. 1 – 18.

[3] 例如，胡塞尔在 Hua XXI 中非常频繁地提及参见康托尔、黎曼、亥姆霍兹。康托尔：S. 24、40、82、 84、95、145、240、244、413；黎曼：S. 95、250、256、323-324、329-330、337-344、347、406-407、409 、411- 413.

[4] Robinson, Abraham. “The Metaphysics of the Calculus.” *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 47, 1967, pp. 28-46.

[5] 牛顿则对无穷小量 dx 一开始就作过三种不同解释:1669 年规定它是一种常量，1671 年又规定它是一个趋于零的变

为了解决微积分的形而上学问题的争论，魏尔斯特拉斯所领导的柏林数学学派以严格分析的算术化为目的，尝试将微积分的基础严格奠定在算术概念的逻辑分析而非经验的几何直观的基础上[1]。作为柏林数学学派的成员，胡塞尔在其《算术哲学》中重申了分析的算术化任务：

> 数学在过去几个世纪中取得了巨大的进步。当人们还在努力细化牛顿和莱布尼茨的伟大思想，并在许多新的科学领域产生出丰富成果的时候，却忽略了反思所有令人困惑的定理概念的逻辑性质。虚数、无理数、微分和积分、连续性等模糊的、表面上是相互矛盾的、但在分析中仍然不可或缺的概念。都需要从根本上进行逻辑上的澄清。这些分析的基本概念没有一个是清晰和深彻的。[2]

分析的算术化运动从达朗贝尔、波尔查诺、柯西等人的工作开始，而最终由魏尔斯特拉斯用逻辑刻画的ε-δ的极限定义彻底取代了经验直观的无穷小量 dx 而完成。算术化的目的是将数学分析严格地建立在实数的逻辑结构之上。魏尔斯特拉斯进一步指出，微积分形而上学争论的根源其实是实数系的基础问题，极限、可导和收敛的问题都可以归结到实数系，而对实数系的构建必须放弃传统希腊数学的几何路径解释。由魏尔斯特拉斯发起的严格分析的算术化运动最终以 1872 年康托和戴德金同时发表的实数系统的基础而告终。[3]随后，皮亚诺通过五条基本法则对自然数进行公理化定义，并得出了自然数的所有性质。然后通过引入负数的概念将自然数系扩展为整数系，最后借助分数构造法，可以直接定义有理数，并建立其性质。所以，一旦对于自然数的逻辑处理完成之后，建立实数系的基础问题也就完备了。在实数理论的基础上，又可以建立极限理论的基本定理，从而使数学分析摆脱了几何直观的依赖而也最终建立在实数理论的严格基础之上。数系成为了严格分析的算术化运动的基石。但在上述步骤中，建立有理数系的关键问题，在于采取一些步骤来构造自然数的基础并确立其性质。因此，通过严格分析的算术化运动，微积分的形而上学问题转化为了对于数的概念的关键澄

量，1679 年则被“两个正在消逝的量”的最终替代。Cf. Berkeley, George. “The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician. ”Edited by David R. Wilkin1, 1734.这个文章有一个冗长的副标题：致一位不信教的数学家的评论(牛顿的朋友哈雷),其中剖析现代分析学的目标、原理和结论是否比宗教的神秘和教义有更清晰的构思或更缜密的推理。

[1] 分析的算术化这个表述来自于克莱因于 1895 年在哥廷根作的一个著名报告“数学的算术化”(Arithmetizing of mathematics)。克莱因的这个报告被视作是哥廷根学派对柏林数学学派算术化运动的认可。

[2] Hua XII, S. 290.

[3] 康托尔在他的集合论中尝试建立一个“实无穷”（即超限数）的数学体系。因此，分析的算术化运动实际上是在数学基础中通过集合的“无穷大”替代了微积分的“无穷小量”。

清。对数概念的合理的解释成为 18、19 世纪的一个重大观念事件，包括胡塞尔和弗雷格在内的诸多数学家都参与了对该问题的讨论：（1）施通普夫《数学公理研究》(1870 年）、（2）弗雷格《算术基础：一项对数概念的逻辑数学研究》(1884 年）、（3）亥姆霍兹《数与测量的认识论研究》(1887 年）、（4）克罗内克 《论数的概念》(1887 年）、（5）戴金德《数是什么和数应该是什么》(1888)、（6）希尔伯特《关于数的概念》(1900 年）。[1]胡塞尔在《算术哲学：对数概念的心理学和逻辑学研究》（1890 年）中继续将微积分的形而上学问题作为数、算术哲学的研究任务：

> 人们在以前过多地抱怨微积分神秘性。最杰出的哲学家和数学家共同合作形成的极大量的文献见证了他们想用知识之光澄清这些神秘的强烈愿望。这**个介于哲学和数学之间的边缘领域被称为“微积分的形而上学”（或许要以达朗贝尔为例）**……或许我的努力并非完全无用，至少在某些基本点上，我将成功地为微积分的真正哲学铺平道路，那是几个世纪以来的愿望。[2]

2) 哥廷根数学学派的几何的公理化运动：形式化与意义的抽空

柏林数学学派的魏尔斯特拉斯和克罗内克引导的严格分析的算术化的开端正是罗巴切夫斯基（Nikolai Lobachevski）、波尔约（ Bolyai）、黎曼（ Bernhard Riemann）创立非欧几何的时期。而几何的公理化运动则主要是由哥廷根数学学派的高斯、黎曼、克莱因、希尔伯特完成的。严格分析的算术化运动使得数学基础从几何直观中彻底解放出来而建立在算术的基础上，而非欧几何、射影几何、仿射几何以及微分几何则直接动摇了传统欧式几何学的直观基础和康德以此为基础的先天直观形式。1854 年，黎曼在 《论作为几何学基础的假设》中革命性地引入了子流形和曲率的概念。特别地，若空间中每一点的曲率都相同（称为常曲率空间），则存在三种可能性：曲率为正常数，曲率为负常数，曲率为零。第一种情形对应球面形态的空间（黎曼椭圆几何），

[1] （1）Stumpf, Carl. *Über die Grundsätze der Mathematik*. 1870;
（2）Frege, Gottlob. *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: W. Koebner, 1884;
（3）Helmholtz, Hermann von. *Epistemologische Untersuchungen über Zahl und Messung*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 19;
（4）Kronecker, Leopold. “Über den Zahlbegriff.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 101, 1887, pp. 337-355;
（5）Dedekind, Julius Wilhelm Richard. *Was sind und was sollen die Zahlen*? 1893;
（6）Hilbert, David.“Über den Zahlbegriff.” *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 8, 1900, pp. 180-183.

[2] Hua XII, S. 7.

第二种情形对应平坦的经典欧几里得空间，第三种情形对应于罗巴切夫斯基的非欧几何。通过曲率参数的统一描述，黎曼不仅将不同几何学纳入同一框架，而且也打破了传统欧氏几何的统治地位，证明存在多种自洽的几何体系。随后克莱因（F.Klein）在1872 高斯和黎曼之后提出了 Erlangen 纲领，进一步将把所有的几何知识统一为一个变换群之下的不变性质，非欧几何领域的这些发现进一步加速了几何学的公理化。希尔伯特继承了克莱因的几何学统一化的思想，在其 1899 年的著作《几何基础》（Grundlagen der Geometrie）中提出，几何公理的不矛盾性可以通过将其转化为实数算术系统的不矛盾性来证明。具体来说，他通过构建笛卡尔坐标系，将欧几里得几何的公理与实数算术的公理联系起来，从而将几何学的逻辑一致性依赖于算术系统的无矛盾性。[1]

几何学的公理化割断了它与对象的直观所予的联系，公理只是导出结论的推理基础，数学认识论的重心不再是关注构成它的概念的真理，因此也不用关心这些概念的物理意义。[2]当公理和实在之间产生某种联系的时候，这种物理意义至多只能是发现真理的向导。数学从实在性中裂变成为不关注概念含义的数学游戏， 数学的真理只是建立在公理的无矛盾性上，这成了数学形式化所盛行的观点。[3]胡塞尔在对欧洲科学的危机的批判和对几何学起源的分析中，再一次指明了几何的公理化所导致的形式化问题的关节所在：

> 这种思想立即得到全面的扩展，被应用于几何学，应用于空间时间形态的整个纯数学，而这后者为了方法的目的被完全按代数的方式形式化了。因此产生了“几何学的算术化”，整个纯形态领域（理想的直线、圆、三角形、运动、位置关系等）的算术化。这种几何学的算术化好像是自然而然地以某种方式导致将几何学的意义抽空。[4]

综上，柏林数学学派的分析的算术化运动所导向的数概念的认识论问题与哥廷根学派的几何的公理化所蕴含游戏语义学之间的矛盾，在这种矛盾中蕴含的正是我们后面所要论述的胡塞尔在其《算术哲学》方案中数的概念系统和符号系统之间的张力结构问题。同时，分析的算术化运动与几何的公理化运动导致了 19 世纪数学发展的两个

[1] 希尔伯特:《几何基础》，江泽涵、朱鼎勋译，北京:科学出版社，1987 年，第 9 节。
[2] 钱立卿：《论希尔伯特公理化方法的哲学意义》,《哲学分析》2022 年第 4 期。
[3] 莫里斯·克莱因:《数学：确定性的丧失》，李宏魁译，长沙:湖南科学技术出版社，1997 年，第 297-300 页。
[4] 胡塞尔：《欧洲科学的危机与超越论的现象学》，王炳文译, 商务印书馆，2017，第 61-62 页。

关键的转变：一是算术与几何的不对称认识；二是这种不对称的认识形成了分析的算术化运动、几何的公理化乃至逻辑的代数化所导致的数学形式化特征。数学作为一门量和数的科学完全被重新表述为一门公理化和形式化的学科。这种公理语义学和数学认识论的矛盾带来了更加深远的意义问题：生活世界的形式化与意义的抽空。

1.1.2 胡塞尔现象学中的数学认识论：问题线索和文献梳理

数学认识在胡塞尔现象学中占据关键的位置。对胡塞尔来说，数学知识不仅是一种思想资源和方法模型，数学认识还须由超越论现象学的反思和构造进行奠基。从其第一部著作《算术哲学：一项心理学与逻辑学研究》中**分析的算术化**引起的**数的直观和概念的起源**问题，到最后一部著作《欧洲科学的危机与超越论现象学》里**自然的数学化**所肇始的**几何对象的意义充实和积淀**问题，数学认识的可能性问题自始至终都是现象学认识论中贯穿的问题要义。本文的第一个任务是对胡塞尔现象学传统中关于数学哲学的文本进行连续性的统一解读。

1) 胡塞尔的博士论文：变分法与极值求解

胡塞尔的博士论文是关于变分理论的研究，这项工作并未发表，也未在当时产生影响。变分法是数学分析中的一个重要分支，主要是在给定约束条件下，确定未知函数的形式，使得依赖于该函数的积分达到极大或极小值，从而寻找最优解，如最小作用量原理、最短路径等问题。[1]胡塞尔的博士论题《变分法论稿》来自魏尔斯特拉斯在 1879 年春季学期所讲授的变分法课程[2]，他在此基础上负责编辑了魏尔斯特拉斯著作全集第七卷中关于极大极小值的变分理论的《变分学讲义》，[3]并在博士论文中讨论了最简单情况下的二阶变分理论。这一讨论是以一个只包含一个因变量且变分积分中仅出现一阶导数的情形为起点的，目标是探究雅可比理论的逻辑基础，并在此基础上建立一个更加一般化的框架。[4]与一般的数学博士论文不同，胡塞尔的工作更多地反映了对变分学的基础理论和前提条件的思考。随着当代数学史家对 19、20 世纪变分法的关注，尤其是克雷格·弗雷泽（Craig Fraser）的研究表明，胡塞尔的问题域是 19 世纪 30 年代到

[1] 关于十九世纪变分法的数学史研究可参见 Fraser, C 的工作，尤其是 Fraser, C. “The Clebsch-Mayer Theory of the Second Variation in the Calculus of Variations: A Case Study in the Influence of Dynamical Analysis on Pure Mathematics.” *Research in History and Philosophy of Mathematics*, edited by M. Zack and D. Waszek, Birkhäuser, 2024.

[2] Husserl, Edmund. *Beiträge zur Theorie von Variationsrechnung*. Unpublished dissertation. University of Vienna. 1882.（该手稿在胡塞尔档案中编号为 K VI 3）

[3] Weierstrass, Karl. *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Edited by Rudolf Rotthe. vol. 7. Leipzig. 1927. 在柏林洪堡大学数学系图书馆里仍保存着这门课程的抄录和笔记，前言中提到胡塞尔是合作者。

[4] 雅可比理论主要是判断极值性质和分析变分问题解的稳定性方面。胡塞尔对雅可比理论的分析具体可参见本文的附录二和附录三。

19 世纪末变分法中的一个重要环节。[1]同时，本文的分析将集中在胡塞尔博士论文的数学哲学方面，认为变分法的极值求解与现象学的本质变更在方法上存在相似性。我们会在 2.2 节和 3.8 节处理该问题，这将有助于我们把握和理解胡塞尔思想的连续性。

2) 数的概念系统与符号系统的不对称性奠基关系及其张力结构

胡塞尔在 1886 年至 1895 年期间的数学哲学手稿（包括研究手稿和演讲手稿）全部归属于 KI 类手稿。其中绝大部分已发表在全集 Hua XII《算术哲学：对数概念的心理学和逻辑学研究（增补 1887-1901）》; Hua XXI《算术与几何学研究（1886-1901）》、Hua XXII《文章与书评（1890-1910）》中。胡塞尔在这一时期的论题主要集中于数的概念的直观、符号系统的定义、集合论、流形论以及在此基础上对逻辑演算与逻辑演绎进行区分的讨论。

柏林数学学派通过分析的算术化运动最终将微积分的形而上学问题归结于数的直观和概念的起源性解释。胡塞尔在《算术哲学》的研究计划中将微积分的形而上学问题作为算术哲学工作的出发点：

> 一方面是对算术基本概念的分析，另一方面是对体现算术特点的符号方法的分析，承诺为心理学或逻辑学提供一些成果，从而进行了比“微积分的形而上学”所要求的更详细的研究。[2]

胡塞尔结合魏尔斯特拉斯的算术化进路，并运用布伦塔诺对本真和非本真表象的区分对数概念的起源和内容进行了心理学和逻辑学层面的分析，提出了本真数的直观理论与符号定义系统两种方案解决微积分的形而上学问题争议。胡塞尔在算术哲学的第一部分的心理学研究是关于有限的本真数的直观及其表象的讨论，而在第二部分的逻辑学研究则是从本真数到无限的符号数的扩展，并根据运算法则定义数的概念，进一步研究数的直观的概念系统到数的符号的形式系统的合法扩张问题。但此两种方案无法解决数系扩张中虚构数的难题，问题在于无法用本真数的直观表象解释虚数的无对象性，同时虚构数的符号系统可以映射不同内容的数的概念系统，从数的概念系统到符号系统因此存在不对称性的奠基关系。

[1] Fraser, C. “Edmund Husserl’s Contributions to the Second Variation in the Calculus of Variations.” *Serva di due padroni: Saggi di storia della matematica in onore di Umberto Bottazzini*, edited by Alberto Cogliati, Egea, 2019, pp. 263–289.弗雷泽分析了胡塞尔对变分法研究的历史背景，讨论了其博士论题中前三分之一的工作，并提出了一种可替代的较之胡塞尔更为简洁的分析方法。

[2] Hua XII, S. XXII.

在完成《算术哲学》第一卷后，胡塞尔预告了第二卷会解决负数、有理数、无理数等虚构数的问题，而且对实数和虚数的论证涉及它们在直线和平面中的直观模式，并进一步导向对“直观基础”与“演绎公理系统”的澄清。但是 Hua XII 的第二卷最终没有完成。Hua XXI 的算术部分是胡塞尔所预告的 Hua XII 第二卷的主要内容。胡塞尔继续处理了对算法的逻辑考察和数域的扩张问题：研究了数、量、函数以及形式算术等；同时也开始构建一般算术体系，包括了数、集合和流形的进一步探讨。另外 Hua XXI 的第二部分还收录了胡塞尔早期关于几何学的相关思考，尤其是对他在 1892 年开始对黎曼（Riemann）、亥姆霍兹（Helmholtz）的流形论阐释以及几何学批判。在编号 KI 33 的手稿中记录了胡塞尔关于空间现象学的研究计划，这项工作在 1894 年 10 月就已经启动：（1）直觉空间和几何空间。（2）纯粹几何和直觉（直觉几何及其与纯符号几何的冲突）。（3）几何空间，它是三维的欧几里得流形，是纯粹演绎几何的基础。（4）客观科学的空间和应用几何学。（5）对经验主义尤其是亥姆霍兹进行批判（6）先验空间与几何学的认识论意义。关于几何问题的现象学思考更成熟的文本收录在 Hua XVI《事物与空间》，尤其是动觉与空间的构造关系。[1]但是胡塞尔最终没有形成一本空间现象学的系统研究，他在 1906 年的一本笔记中确认自己尽管在 1894 年就已经想启动这个计划，[2]但各种尝试都失败了：

> 整个在莱布尼茨意义上的普全数学模式（mathesisuniversalis）都可以被纳入到纯粹逻辑学中。但我把几何学看作例外，这只是因为我（在与我自己斗争了很久之后）已经放弃了对它做不同于力学的评估。[3]

由于胡塞尔视域内算术认识与几何认识的不对称性，因此与几何认识相关的空间现象学以及几何学起源的历史现象学，在本文处理的问题域中并不占据主要位置。

3) 相对完备的和绝对完备的两种流形论与公理化批判

应哥廷根数学学派的克莱因和希尔伯特的邀请，胡塞尔在 1901/02 冬季学期的第五次会议（1901 年 11 月 26 日）和第七次会议（12 月 10 日）上发表了题为“通过不可能的数的转换与公理系统的完备性”（Der Durchgang durch das Unmögliche und die

[1] Hua XVI, S. xxvii- xxviii.
[2] 转引自倪梁康：《历史现象学的基本问题——胡塞尔《几何学的起源》中的历史哲学思想》，《社会科学战线》2008 年第 9 期。
[3] Brief.V, S. 53-54.

Vollständigkeit eines Axiomensystems）的双重讲座。[1] 流形论讲座手稿保存在鲁汶大学档案馆编号为 Ms.KI 26 的文件中，原讲稿已经丢失。现存两个版本，第一个版本存在 Hua XII（算术哲学：心理学与逻辑学研究》）的附录中，第二个是 Karl Schuhmann 夫妇于 2001 年重新修订补充发表的版本，其中包括了胡塞尔对希尔伯特算术公理化的分析和批评[2]。在双重讲座中，胡塞尔在第一次讲座提出了关于解释虚数存在性问题的五种方案，在第二次讲座中提出了针对该问题的相对限定性和绝对限定性的两种流形论解释方案，将虚数定义为由确定的公理所规定并在一个相容的推理系统中形式化定义的概念，并认为绝对限定性的（Definitheit）概念与希尔伯特为算术奠基引入的"完备性公理"之间具有紧密联系[3] 。Ingeborg Strohmeyer 在 Hua XXI 的"编者导言"中认为胡塞尔在 1890 年前后的算术扩张理论是以演算概念为导向的，直到 1901 年，他为了准备此次讲座，才转向希尔伯特意义上的公理化思想。[4]但是胡塞尔毫无疑问进一步补充了希尔伯特公理化的思想，他认为我们不可能仅仅实现一种高阶流形的形式数学而脱离意义范畴和对象范畴。[5]胡塞尔的完备性是一种蕴含意向性和模型论解释的语义完备性而非希尔伯特的句法完备性。

胡塞尔的流形理论一直贯穿在其后续的思想和著作中，例如在 Hua Ⅲ/1 的§72、Hua VI§9（f 与 g 小节）、Hua XVIII 的§69-§70、Hua XVII 的§51-§54、Hua XXI 的 No. 11、Hua XXIV 的第二章、Hua XXX 的§18-§19 中都详细地讨论了流形论。

4) 逻辑演算与逻辑演绎的区分以及集合悖论

在对数的概念系统与符号系统之间的张力结构的分析和解决的基础上，胡塞尔从数学哲学问题转向了逻辑认识论。HuaXXII 汇集了胡塞尔在 1890-1910 之间发表的逻辑学书评和文章，代表了胡塞尔在《算术哲学》到《逻辑研究》期间的思想演变。其中有 6 篇是胡塞尔对德国当时代数逻辑著作的书评，尤其是在对施罗德的《代数逻辑》的书评中[6]，胡塞尔一方面分析了逻辑演绎的推理有限性和逻辑演算的符号无限性之间的张力结构，认为逻辑演绎是逻辑演算的基础。另一方面，在语言和演算之间，胡塞

[1] 演讲的标题和日期被记录在 1902 年第 11 期《德国数学家协会年刊》（Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung）的第 72 页和第 147 页。

[2] 流形论的第一个版本可参见 Hua XII, S. 430-444;452-457。第二个增补扩充的版本可参见 Schuhmann E. and K. Schuhmann,"Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901", *Husserl Studies* 17, no. 1 (2001): 87–123。

[3] Hua III/1, S. 153.

[4] Hua XXI, S. XXXIIIf.

[5] Hua XVII, S.87.

[6] 胡塞尔的《算术哲学》与施罗德的《代数逻辑》是在同一年发表的。

尔批评了施罗德将逻辑演绎同化为逻辑演算，使得推理成为一种计算。[1]同时需要注意的是，在弗雷格和胡塞尔的通信中，弗雷格通过对胡塞尔关于施罗德著作的评论的阅读，认识到胡塞尔区分了意义和指称。因此，弗雷格和胡塞尔各自早在 1891 年之前独立地阐述了意义和指称理论。

胡塞尔批评了施罗德的代数逻辑，进一步区分了逻辑演算和逻辑演绎（计算与推理的区别），乃至内容逻辑与外延逻辑，并在此基础上讨论了外延逻辑所导致的集合悖论问题。胡塞尔在 Hua XVII 的§39、Hua XII S.218-221、Hua XXI 的 No. 11 的小节讨论了康托尔的集合问题，尤其是经验感知的有限集合以及符号化扩展的无限集合。另外，还有新近出版的手稿 AI35：part α（1912）与 1912 和 part β（1920），胡塞尔处理了集合悖论问题，特别是罗素悖论和理查德悖论，探讨了集合不能包含自身作为元素的原因，以及解决这些悖论的可能方法，比如限制集合的定义或引入分层理论。[2]

因此，通过对胡塞尔 1890-1910 之间关于数学、逻辑的文献梳理，我们可以得出他在数学哲学和逻辑学中潜在隐含的形式建构和直观构造的张力结构。胡塞尔一方面从对数的概念系统、符号系统、形式算术逻辑探索迫使他超越了数学领域，并走向形式演绎系统、流形论的一般理论，而另一方面他则从对数学基本概念的起源研究最终转向了对逻辑学的本质问题和纯粹认识论问题的起源研究。

5) 从形式本体论到范畴直观

胡塞尔从 Mat I《逻辑学讲座：1896》开始勾勒《纯粹逻辑学导引》中的纯粹逻辑学的蓝图，并在 Mat II《逻辑学讲座：1902/03》和 Mat VI《新旧逻辑学讲座：1908/09》中在对亚里士多德的传统逻辑批判的基础上进一步完善了他的逻辑学构想。他将纯粹算术作为纯粹逻辑学的一个分支（Mat I , S. 241、271; Mat II , S. 19、34; Hua XXIV, §15），将纯粹逻辑学和流形论发展为形式本体论。关于形式本体论的论述可见于 Hua XVII§27 的 b 小节（《纯粹逻辑学》导引的道路：从形式命题学到形式本体论）、§23-§26 节（形式命题学与形式数学）、§28-§35§（演绎系统理论与流形论）以及 HuaXXII 中第一章的第三节（形式本体论：普全数理模式）。另外还可见于 Hua Ⅲ/1, S. 26-27 以及 EU, S. 52、55、61、78、167。在《纯粹逻辑学导引》的第十一章的§67- §70 节，胡塞尔划分了纯粹逻辑学的各个层次和范畴对象的不同领域，尤其是纯粹逻辑系

1 Hua XXII, S. 3-91.

2 Lohmar, Dieter, and Carlo Ierna. “Husserl’s Manuscript A I 35.”*Husserl and Analytic Philosophy*, edited by Guillermo E. Rosado Haddock, De Gruyter, 2016, pp. 289-320.

统中含义范畴、对象范畴。在 Hua XVII 的第 33 节（实际的形式数学与游戏规则的数学）中，胡塞尔指出作为形式本体论核心的流形论不能脱离含义范畴和对象范畴。只有我们能够对纯粹形式范畴进行直观的现象学认识论澄清时，才能进一步解决形式化引起的数学游戏的无意义问题。

> 一方面是纯粹逻辑的领域，另一方面是意识行为领域—或者如我现在所说的现象学领域以及心理学领域。我不知道该如何把它们结合在一起，可它们彼此之间肯定存在着某种关系，并由此结成一个内在的统一体。[1]

胡塞尔认为只有通过范畴直观对形式本体论进行现象学的认识论解释，形式知识的客观性之有效性才能彻底解决。现象学的认识论可以“涌现出”纯粹逻辑学的基本概念和观念规律的“源泉”[2]。在第六研究的第 60 节中，胡塞尔讨论了范畴的本质类型以及与之相关的意向性，区分了三种本质类型：经验范畴对象、混合范畴对象、纯粹范畴对象。其中几何对象属于混合范畴对象，而数、集合属于纯粹范畴对象。胡塞尔关于数学对象的范畴直观的主要文本出现在第六研究的 6、7、8 章以及§59、§62、§63 和§64 节以及第三章相关的范畴代现内容，进一步地，关于数与集合的数学直观，可见第六研究的§59、§51、§18 节，EU§89-§90、§93 的 b 小节，以及 Hua IX §9 关于本质直观分析的 f 小节，具体论述还可见 Hua III/1, S. 154-156；Hua XVII, S. 213, 217, 73；Hua XIX/2, S. A605/$B_2$133。

6) 从形式逻辑到超越论逻辑：无矛盾的一致性数学与真理的构造数学

胡塞哲学（逻辑学）的转向始终以数学哲学的研究为前提的。胡塞尔在 Hua XVII（《形式逻辑与超越论逻辑》）§51-54 中区分了三个逻辑层次：纯粹语法、一致性（无矛盾性）逻辑和真理逻辑，并在§51 中对纯粹无矛盾的数学与可能的真理的数学进行了区分，继而在§73 中认为数学分析的观念化预设是构造批判的主题，并在§75、§76、§77 中尝试对形式逻辑、形式数学的真正意义进行超越论逻辑的意向性阐释。

胡塞尔关于数学对象的本体论观点主要集中于 Hua XVII 的第三章的§31、§39，EU§64 的 d 小节，Hua IX, 22-28；还可以见 Hua II, S. 87-88；Hua XI, S. 221-222。在 Hua XVII§27 第 a 节：《算术哲学中对范畴对象的首次构造》中，胡塞尔声称他早期对

[1] Hua XXIV, S. 433.
[2] 胡塞尔：《逻辑研究（第二卷第一部分）》，倪梁康译，北京：商务印书馆，2015 年。

数概念的分析已经包含了一种超越现象学的考察，这种考察将范畴对象理解为构造意向活动的关联物。

关于潜无限的构造讨论，可见 Hua XVII 的§74、Hua Ⅲ/1 的§143、EU 的§51 的 b 小节，尤其是在 Hua III/1 的§100-101 中，胡塞尔讨论了反思的无限迭代和意向性的层级关系。

7) 从经验到判断：数学、逻辑对象的构造起源和意义积淀

《形式与超越论逻辑》是作为《经验与判断》中发生逻辑学的引论而出现的。[1]胡塞尔在超越论逻辑中处理了逻辑范畴在直观中的自身给予和构造的明证性问题（Hua17（§68-70、63）；而在《经验与判断》则进一步处理现象学构造视域中的逻辑判断的构造起源（EU§5、§10-11），从逻辑判断的明证性回溯到前谓词对象的明证性、亦即回溯到生活世界经验的明证性。在《欧洲科学的危机和超越论现象学》中，现象学起源研究对逻辑直观基础问题的具体例示分析，胡塞尔以“几何学的起源问题作为意向历史问题”为例分析了感性直观几何到符号逻辑的起源。[2]他将启蒙运动的最高成就（伽利略和牛顿的科学）的起源问题和他自己一生工作的最高成就（严格科学的超越论现象学）联系起来，认为真正的历史说明（Historische Erklärung）的问题是与从认识论上进行的现象学澄清（Aufklärung）相一致的。在这种历史现象学的分析中，时间性是意向历史的基础，通过分析内时间性的结构，尤其是对滞留的双重意向性的分析，意义生成的意向历史和对象在意识中显现的实际历史存在本质联系，观念对象的先天性因此和历史事实也本质地联系起来。通过现象学的这种意向历史运作，通过去积淀化追溯形式化的发展，寻求其“构造起源”，再现其“意向起源”。而“意向起源”回指“构造起源”“积淀历史”最终被重新激活为“意向历史”。[3]现象学本质上是一门关于真正开端、关于起源，追求一切事物的根的科学。

1.1.3 二十世纪数学基础争论中的胡塞尔数学现象学

分析的算术化运动与几何的公理化运动同时也对康德的数学认识论产生了挑战。布劳威尔、外尔等人坚持康德以时间的先天直观形式为基础的算术观，但放弃了康德

[1] 倪梁康：《胡塞尔遗著〈经验与判断〉》，《同济大学学报：社会科学版》2018 年第 5 期。

[2] Husserl, E. Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentional-historisches Problem. *Revue Internationale de Philosophie*, vol. 1, no. 2, 1939, pp. 203-225.

[3] Hopkins, Burt C. *The Origin of the Logic of Symbolic Mathematics: Edmund Husserl and Jacob Klein. Indiana University Press*, 2011, p. 175.

以空间直观的先天形式为基础的几何观。[1]希尔伯特则坚持算术和几何学的先天认识及其认识论对称性，反对康德将对空间和时间的先天直观作为数学基础。戴德金、弗雷格则坚持非康德的算术观作为逻辑主义的主要思想。[2]在数学基础问题方面，布劳威尔（直觉主义）与希尔伯特（形式主义）在 20 世纪初关于数学对象的存在性问题展开了基础性辩论：形式系统的一致性建构定义和意识场域的可构造性定义何者为真的问题。[3]外尔在 1921 年题为“数学的新基础危机”的苏黎世演讲中，结合当时集合论悖论（如罗素悖论）和直觉主义对经典数学的批判，强调了数学面临的基础问题，他明确使用了“**数学基础的危机**”这一名称。[4]外尔当时的立场倾向于布劳威尔的直觉主义，反对希尔伯特的形式主义纲领。通过外尔的演讲，希尔伯特和布劳威尔关于数学基础的争论成为二十世纪数学认识论发展的重要标记。

胡塞尔与希尔伯特、弗雷格、布劳威尔以及康托尔之间有直接的书信往来，内容涉及学术交流和生活交往。[5]在哥廷根大学，胡塞尔和希尔伯特分别在哲学和数学的角度提出了“完备性”的概念（我们将在本文的第二章，尤其是在 2.5-2.8 节处理胡塞尔与哥廷根学派的关系）。胡塞尔和布劳威尔于 1928 在阿姆斯特丹进行会面并讨论时，布劳威尔的数学直觉主义已经成熟，而胡塞尔也在此前不久发表了他的《形式逻辑与超越论逻辑》（我们将在本文的第六章，尤其是 6.5 节处理二者的关系）。胡塞尔在其第一本著作《算术哲学》中对数学基础问题进行了关注和讨论，尤其是他与弗雷格关于等数性定义的讨论以及对希尔伯特和弗雷格之间争论的抄录和评述。[6]但是，由于胡塞尔在后期专注于超越论现象学的系统构建，即使在《形式逻辑与超越论逻辑》中划分了一致性逻辑与真理逻辑的不同层次，也并未直接参与到二十世纪初关于数学基础的辩论中。他在“大英百科全书第四版关于现象学的词条”中指明，超越论现象学的

[1] 布劳威尔在他的就职演讲《直观主义和形式主义》(1912 年)中，将自己的立场描述为“放弃康德的先验空间立场，但更坚决地坚持先验时间立场”。

[2] 斯图尔特·G·杉克尔（主编）：《20 世纪科学、逻辑和数学哲学：劳特里奇哲学史（十卷本·第九卷）》，江怡、许涤非等译，中国人民大学出版社，2016，第 54 页。

[3] 两人关于数学基础的争论基本是通过数学期刊《数学年鉴》而展开。希尔伯特担任主编，布劳威尔是其编辑委员会成员。1928 年，希尔伯特重新组建编辑委员会，将布劳威尔排除。详尽的讨论可见 Mancosu, Paolo, editor. *From Brouwer to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford University Press, 1998.

[4] Weyl, Hermann. “The Crisis in the Foundations of Mathematics.” In *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, edited by William Ewald, vol. 2, Oxford University Press, 1996, pp. 1069-1106.

[5] 与之相关的《数学与现象学通信集》将于 2025 年 9 月出版。

[6] Hua XII, S. 550; 447-451.其中附录 I 是胡塞尔为希尔伯特的一场讲座所做的笔记，该讲座是胡塞尔自己在哥廷根演讲期间举行的。附录 II 包含了胡塞尔对弗雷格和希尔伯特在 1899 年至 1900 年间通信的部分抄录和评述。

系统构造和成功应用可以避免数学认识论中悖论的产生问题。[1]同时从胡塞尔私人图书馆中数学、物理部分的藏书调研可以发现，胡塞尔对数学基础的争论有着深刻的理解，尤其关注直觉主义者、形式主义者和柏拉图主义者之间的争论。他特别关注希尔伯特的《数学的新基础》，其中希尔伯特首次公开提出了他的证明理论方案。胡塞尔对外尔的悖论讨论及布劳威尔的数学方法也表现出浓厚兴趣，且关心外尔如何调和布劳威尔与希尔伯特的不同立场。此外，胡塞尔通过阅读魏斯曼（Friedrich Waismann）的著作，了解了哥德尔于 1931 年提出的两条不完备性定理及其深远影响。魏斯曼作为哥德尔第一次宣布不完备性定理时的在场者，在他随后的著作中对这些定理及其相关进展进行了讨论。胡塞尔还阅读了与此相关的卡尔纳普和根岑（Gerhard Gentzen）的论文，尤其关注哥德尔不完备性定理的哲学意义，并了解了斯科伦（Thoralf Skolem）关于有限公理系统不可能进行完整刻画的理论。[2]

现象学与数学形式主义、数学直觉主义之间关联的数学认识论问题主要由胡塞尔的学生贝克尔（Oscar Becker）、外尔（Hermann Weyl）、曼科（Dietrich Mahnke）、考夫曼（Felix Kaufmann）通过各自的研究和相互批评展开（相关的信件交流信息参见本文的 7.2 节）。他们关于数学哲学的现象学研究基本上可以标识为**现象学的直觉主义解释与现象学的形式主义解释两条路径**。在 1927、1928 年汉堡大学的数学研讨会上，当希尔伯特再次攻击布劳威尔的观点时，外尔站出来为直觉主义辩护，他批评了希尔伯特的形式化观点，认为形式主义将数学从一个直观后承的系统变成了一个按照固定规则进行的公式游戏，而在数学系统中，一致性是必要但并非充分的条件[3]，并认为形式主义对直觉主义的胜利会最终动摇胡塞尔现象学的纲领：

> 如果希尔伯特的观点胜过直觉主义，这在所有情况下都是如此，那么我在这看到了纯粹现象学哲学立场的决定性失败，而事实似乎如此，那么我认为这就是纯现象学哲学态度的决定性失败，因此，即使在最原始、最容易得到证据的认知领域——数学，这种态度也不足以理解创造性科学。[4]

[1] Hua IX, S. 297.大英百科全书第四版关于现象学的词条。

[2] 胡塞尔私人图书馆的具体信息和详细分类参见本文的附录一。

[3] Van Heijenoort, Jean, editor. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1879–1931. Harvard University Press, 1967, p. 483.

[4] Weyl, Hermann. “Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik.” *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, vol. 6, 1928, pp. 86-88. Reprinted in Weyl, III, 147–49.外尔后来在一篇综述文章的结尾非常简洁地重申了他的观点：“反现象学的构造方法（希尔伯特

贝克尔反对外尔的这种论调，并继续就该问题与胡塞尔与同为希尔伯特的学生曼科（Dietrich Mahnke）进行了进一步的讨论。曼科认为外尔的这种论点意味着形式主义对现象学方法的挑战：如果外尔认为布劳威尔的直觉主义无法支持理论物理学，那么胡塞尔的“经典”现象学也可能被视为无法保证自然知识的现代形式，并使其完全可理解。[1]我们在这里从形式主义、直觉主义和现象学立场出发，对外尔的论点进行重构：

P1. 如果希尔伯特的形式主义（H）战胜布劳威尔的直觉主义（B），那么布劳威尔的直觉主义（B）不能为经典数学提供基础（¬BB）。

P2.布劳威尔的直觉主义（B）可以等同于现象学的直观构造理论（B≡P）

P3. 现象学的直观构造理论（P）可以为数学提供基础（PB）。

结论 C: 希尔伯特的形式主义（H）战胜了布劳威尔的直觉主义（B），因此，现象学的直观构造理论（P）不可以为数学提供基础（¬PB）。我们会在本文的第 7 章对该论题进行进一步的分析和反驳。

在希尔伯特与布劳威尔关于数学对象和基础问题的争论中，贝克尔在其《数学实存：数学现象的逻辑学和本体论研究》中试图阐明现象学的立场及其解决方案。[2]他认为形式系统的可建构性与无矛盾性并不足以保证数学对象的存在性。形式主义是本质上是演绎的数学，其根本问题是非矛盾性（Widerspruchsfreiheit），而直觉主义本质上是证明与构造的数学，其根本问题是可判定性（Entscheidbark）。贝克尔拒绝了希尔伯特对康托尔超限数的数学辩护，而是从布劳威尔基于潜无限的直觉主义出发，尝试通过胡塞尔现象学的意向构造为康托尔的超限数进行本体论的辩护，从而为从形式系统到直观构造的数学对象的存在争议问题提供现象学的解决方案。

贝克尔主张，只有从历史—解释学的立场出发，才能完全理解直觉主义。作为两种不同的数学认识模式，直觉主义与形式主义之间的对立植根于亚里士多德—康德的批判数学哲学与柏拉图—莱布尼茨的数学神秘学传统中。这两种数学认识的对立产生于对生活本身的人类学理解与绝对认识的观念论之中。因此，数学对象作为纯粹形式意识和具体历史存在的真正现象，它既可以通过构造性分析也可以通过本体论解释来达到。贝克尔的工作在很大程度上综合了胡塞尔形式的、超越论构造的现象学方法与海德格尔的此在时间性的解释学。贝克尔认为，数学实践不仅仅是理性演绎的结果，更

的方法）的成功是不可否认的”。Cf. Weyl, Hermann. “A Half-Century of Mathematics.” *The American Mathematical Monthly*, vol. 58, no. 8, Oct. 1951, p. 494.

[1] Briefwechsel mit Dietrich Mahnke, Aust Bernd Peter and Sattler Jochen , eds, in Peckhaus Volker, ed., *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, pp. 245–278. 贝克尔在 1926 年 8 月 22 日致曼科的书信中引用了外尔的原话。

[2] Becker, Oskar. *Mathematische Existenz, Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene*. 2nd ed., Max Niemeyer Verlag, 1973 [1927].

是一种特定的存在方式，紧密联系着人类的存在方式，类似于音乐和哲学的实践。他试图发展一种预示现象学，这种现象学基于胡塞尔的本质意识现象学与海德格尔的历史诠释现象学，并从数学直觉主义出发，通过符号的预示和占卜，解释形式主义的有效性和自然的可理解性问题。

与贝克尔不同，曼科认为胡塞尔的数学现象学具有从形式逻辑到本质直观的两条数学认识论的路径：**概念—分析（形式逻辑）与直观—综合（本质直观）**。他详细讨论了胡塞尔的形式本体论与希尔伯特的公理系统的形式化建构的逻辑分析路径，并且提到了胡塞尔流形论与希尔伯特元数学的初步关系。[1]在其 1917 年的《新单子论》（Neue Monadologie）中，曼科认为纯粹形式数学在原则上可以作为胡塞尔提出的限定的流形，但是他认为这需要一个进一步的论证，胡塞尔在自己拥有的副本中标记了这个问题[2]。

胡塞尔的另一位学生考夫曼（Felix Kaufmann）在其著作《数学中的无限性及其消除》(1930 年）[3]，试图和外尔和贝克尔一起将胡塞尔的现象学应用于构造数学。他反对布劳威尔将数学实体视为心智或意识的构造，但同意布劳威尔对不可数无限的批评。认为我们只能接受潜无限而不能接受实无限。考夫曼批评康托尔的集合论，特别是关于无限集合和阿列夫（超限基数）的层级结构。他拒绝集合的集合、所有序数的集合的概念使用，认为这些概念会引发布拉利—福尔蒂悖论等形而上学争论，我们可以通过有限的概念来替代“无限大”概念，而不会影响原命题的实质内容。[4]

在现象学与数学直觉主义的思想关联方面，不同于胡塞尔与布劳威尔之间的间接关系，贝克尔直接影响到了海廷对于数学直觉主义逻辑的形式化。他在其《数学实存》中首先注意到数学命题意义的意向充实问题，[5]这种数学意向的直观理论根本上影响了海廷。Martin-Löf 指出，“海廷在给出直觉主义解释的逻辑基本概念时，是通过贝克尔受到了胡塞尔的影响”[6]。在对数学命题的意向的充实与失实的分析之后，海廷提出：一个命题 P 表达的意向行为被充实或可充实（或可实现），当且仅当存在 P 的构造（或证明）。

[1] 迪特里希·曼科：《从希尔伯特到胡塞尔：现象学，特别是形式数学现象学的初步导论》，于宝山译，《现代外国哲学》2023 年第 1 期。

[2] Mahnke, Dietrich. *Neue Monadologie*. Max Niemeyer Verlag, 1917, p. 32.胡塞尔收藏了这本书，具体参见本文的附录一：胡塞尔私人图书馆调研（数学、物理部分）。

[3] Kaufmann, Felix. *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung: Eine Untersuchung über die Grundlagen der Mathematik*. Deuticke, 1930.

[4] Kaufmann, Felix. *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung: Eine Untersuchung über die Grundlagen der Mathematik*. Deuticke, 1930, pp. 6-10.

[5] ME, S. 601-602.

[6] Martin-Löf, Per. “Truth of a Proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof. ”*Synthese*, vol. 73, no. 3, 1987, p.415.

同时，在法国认识论传统中，与胡塞尔同时代的卡瓦耶斯（Jean Cavaillès）在 1936 年至 1937 的博士论文《公理方法与形式主义》（Méthode axiomatique et formalisme）中，详细论述了哥德尔于 1931 年发表的成果以及格哈德·根岑于 1936 年获得的成果。他还较早地讨论了直觉主义、逻辑主义和形式主义之间的数学基础争论。他首次指明，胡塞尔提出的完备性法则理论与库尔特·哥德尔于 1930 年提出的不完备性定理之间存在的冲突，[1]并且认为胡塞尔的逻辑学存在一个基本的悖论：如果它想给客观逻辑一个超越论的基础，那么客观逻辑就不能绝对地有效，但是如果它想给这种逻辑一个绝对的基础和绝对的有效性，那么这个基础就不能是超越论的。[2]

1.2 国内外研究现状及其进展：数学现象学的两条解释进路

当前数学哲学中关于现象学的研究具有两条解释路径：第一条路径是以 Jaakko Hintikka 及其学生和追随者 Hartimo、Centrone、Hill 等为代表的现象学的逻辑学解释和胡塞尔早期的数学哲学解释；第二条路径是以 Charles Parsons 及其学生 Tieszen、Van Atten 为代表的胡塞尔后期的超越论—构造现象学和数学直观理论解释。与第二条研究路径相对应，当前胡塞尔现象学研究中，主要是以德国现象学家 Lohmar 和法国现象学家 Pradelle 为代表的从胡塞尔整体思想和系统哲学出发的数学现象学解释。[3]

1.2.1 国外数学哲学研究中现象学的逻辑学解释与数学直观解释

Jaakko Hintikka 和 Charles Parsons 关于现象学的逻辑学和数学直观理论的争论源自对康德直观理论在数学认识论中的不同解释，尤其是直观（Anschauung）一词的确切含义解释和直观在数学方法中的作用。在康德看来，直观就有两个主要的特征：第一是它的直接性（immediacy），即它不推论，也不使用概念，因而是直接获得的。第二是它的单称性（singularity），即直观只涉及某个具体对象，而不关涉不同对象之间的关系。[4]Hintikka 和 Parsons 的分歧在于直观是否应该被理解为仅仅是单称性的，还是既是单称性（singularity）又是直接性的。

[1] Cavaillès, J. *Sur la logique et la théorie de la science*. Paris: Vrin, 1987, pp. 70–71.卡瓦耶斯在其在 1936 年至 1937 的博士论文《公理方法与形式主义》（Méthode axiomatique et formalisme）中，详细论述了库尔特·哥德尔于 1931 年发表的成果以及格哈德·根岑于 1936 年获得的成果，同时还较早地讨论了直觉主义、逻辑主义和形式主义之间的数学基础争论。

[2] Cavaillès, J. *Sur la logique et la théorie de la science*. Paris: Vrin, 1987, p. 65.

[3] 在后文中，我们不对这些研究者的名字进行中译而是直接使用。

[4] 康德:《纯粹理性批判(第 2 版)》(康德著作全集第 3 卷)，李秋零译，北京:中国人民大学出版社，2004 年，第 310-311 页（A320/B376-377）。

Jaakko Hintikka 认为数学判断的综合性仅依赖于其直观成分的单称性，通过类比逻辑规则的存在实例化应用来解释直观在数学语境中的使用。他认为区分概念和直观的要点不在于它们如何指向对象，而在于它们在逻辑上的普遍性和单称性。康德最喜欢的数学证明示例就是通过在几何证明中画辅助线来构造个体实例，由此直观地理解普遍性的几何定理。这种数学证明将普遍性的概念转化为单称的、具体的表征。因此，直观的作用是在数学推理中生成单称项或特定项。这种观点被称为直观的“逻辑学”解释。[1]而 Charles Parsons 则侧重于直观在数学中的认识论和现象学作用，而不是逻辑作用。他认为数学判断的综合性依赖于数学直观的根本直接性，直观在数学判断的形成中起着基础性的作用。他将这种直接性解释为一种感知方式，在意识中的直接地显现。这种观点被称为“现象学”解释。[2]

1) 现象学的逻辑学解释

Hintikka 认为虽然经过贝克尔、外尔等人的现象学的数学直觉主义解读，但胡塞尔现象学与直觉主义的联系始终是表面的，后期的胡塞尔会拒绝数学直觉主义。他分析了胡塞尔的流形论与希尔伯公理系统的亲缘性，认为现象学更加接近于希尔伯特的数学形式主义而不是布劳威尔的数学直觉主义。[3]他将康德直观概念的单称性的逻辑学解释作为直观的最小意义解释，并认为胡塞尔直观概念的基本含义就属于这种最小意义解释。直观仅仅是在经验中与个体对象的一种直接关系，它与感知和想象没有任何关系，也不与任何形式和本质相关。通过将胡塞尔、康德、罗素对于直观的直接性解释为一种对知识形式的逻辑语义学分析，Hintikka 坚持认为，这一传统摒弃了现象学心理学解释，也使得胡塞尔现象学不能被简单地归并入数学直觉主义阵营。[4]在此基础上，Hintikka 的学生 Centrone、Hartimo、Hill 以及其他学者对胡塞尔早期的数学哲学和逻辑学进行了解读，这种解读进一步关联到希尔伯特的形式主义、弗雷格的逻辑主义以及

[1] Hintikka 的观点以及他对 Parsons 的反驳可参见 Hintikka, Jaakko. “Kant’s ‘New Method of Thought’ and His Theories of Mathematics.” *Ajatus*, vol. 27, 1965, pp. 37–47；“Kant on the Mathematical Method.” *The Monist*, vol. 51, no. 3, 1967, pp. 352–375. Reprinted in Posy, 1992; “On Kant’s Notion of Intuition (Anschauung).” *The First Critique*, edited by T. Penelhum and J. J. MacIntosh, Wadsworth Publishing, 1969.

[2] Parsons 的观点以及他对 Hintikka 的反驳可参见 Parsons, Charles(1944.04.13-2024.04.19). “Kant’s Philosophy of Arithmetic.” Philosophy, Science and Method: Essays in Honor of Ernest Nagel, edited by S. Morgenbesser, P. Suppes, and M. White, St. Martin’s Press, 1969. Reprinted in Parsons, 1983 and in Posy, 1992; “Arithmetic and the Categories.” *Topoi,* vol. 3, no. 2, 1984, pp. 109–121. Reprinted in Posy, 1992.

[3] Hintikka, Jaakko. “The Notion of Intuition in Husserl.” *Revue Internationale de Philosophie*, vol. 2, no. 2, 2003, pp. 57-79.

[4] Hintikka, Jaakko. “How Can a Phenomenologist Have a Philosophy of Mathematics?” *Phenomenology and Mathematics*, edited by M. Hartimo, vol. 195, Phaenomenologica, Springer, 2010；“The Phenomenological Dimension.” T*he Cambridge Companion to Husserl*, edited by Barry Smith and David W. Smith, Cambridge University Press, 1995, pp. 78–105.

波尔查诺和康托尔的逻辑学和集合论。

Centrone 认为胡塞尔现象学的研究学者致力于对胡塞尔后期的超越论现象学的反复性解读，而逻辑学家也从未认真审查胡塞尔的形式逻辑的重要性和必要性。在其著作《早期胡塞尔的逻辑学与数学哲学》中，[1]她将胡塞尔在 1901 年之前的逻辑与数学哲学的工作归属于算术哲学、纯粹逻辑学和流形论三个模块，运用符号逻辑重构了胡塞尔从《算术哲学》（1891）到《逻辑研究》（1900/01）期间在哈勒“失落十年”里的数学和逻辑工作。她最后指出，胡塞尔在算术函数的可计算性研究方面具有前瞻性。同时，她还重现了胡塞尔与逻辑学家莱布尼茨、施罗德、弗雷格以及希尔伯特及其学派的讨论，尤其是细致地刻画了波尔扎诺的科学学对胡塞尔的影响。但是这种逻辑学的动机解释并不能将胡塞尔思想的部分之间统一联结，尤其是早期的数学逻辑学与后期的超越论构造之间的连续性。

与 Centrone 不同的是，Hartimo 在《数学的发展和现象学的开端》一书中更加细致地将胡塞尔现象学的开端与十九世纪末柏林数学学派的严格分析的算术化运动联系起来，尤其特别关注胡塞尔的魏尔斯特拉斯主义遗产：为数的概念寻找直观明证性的基础。她认为胡塞尔在后期对形式系统的探索中仍然遵循着魏尔斯特拉斯的思路，而非希尔伯特的形式主义的句法进路。胡塞尔在继续追求公理系统的明证性的直观基础发展出了范畴直观的概念。[2]另外要提及的是，在 Hartimo 之前，Miller、Willard 等人就已经对胡塞尔的魏尔斯特拉斯遗产进行了充足的分析。[3]

Hill 与 Da Silva 共著的《未选择的路：胡塞尔的数学和逻辑哲学研究》中讨论了胡塞尔与希尔伯特、康托尔、弗雷格之间的思想关系。[4]通过分析希尔伯特和胡塞尔关于算术公理化的完备性的问题，她认为胡塞尔与希尔伯特在形式本体论和公理化方面是一致的，但布劳威尔的数学起源于对时间运动的心灵感知，而胡塞尔在算术哲学中明确拒绝了基于时间直观的数字理论，二者是不相容的。Hill 区分了胡塞尔的两种心理主义。第一种是《算术哲学》中的心理主义，弗雷格批评胡塞尔对数概念的抽象是一种心理行为。但 Mohanty、Claire Hill、Haddock 等人都反驳并论证了胡塞尔从一种极弱

[1] Centrone, Stefania. *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl*. Vol. 345 of Synthese Library, Springer, 2010.

[2] Hartimo, Mirja. *Edmund Husserl's Phenomenology and the Development of Mathematics in the Late Nineteenth Century.* PhD dissertation, Boston University, 2005.

[3] Willard, Dallas. *Logic and the Objectivity of Knowledge*: A Study of Husserl's Early Philosophy. Ohio University Press, 1984; Miller, Philip J. *Numbers in Presence and Absence: A Study of Husserl's Philosophy of Mathematics*. Martinus Nijhoff Publishers, 1982.

[4] Hill, z, and Jairo José da Silva. *The Road Not Taken: On Husserl's Philosophy of Logic and Mathematics*. College Publications, 2013.

的心理主义到柏拉图主 Claire Orti 义的转变，该转变与弗雷格的批评是无关的。[1]第二种是现象学的心理学，主要是涉及现象学与数学直觉主义的时间意识与想象意识的本质直观。她认为虽然胡塞尔不是弗雷格主义意义上的心理主义者已经得到廓清，[2]但是布劳威尔主义意义上的心理主义理论仍然吸引着 Richard Tieszen、Mark van Atten 等人，并有待于反驳。[3]Hill 从胡塞尔对弗雷格的等数性定义的批评中得出胡塞尔的内涵逻辑实际上要强于弗雷格的外延逻辑，并且认为康托尔集合论中的柏拉图主义思想也影响了胡塞尔的数学哲学思想。[4]

除此之外，具有分析哲学背景的 Haddock 认为，胡塞尔的数学哲学本质上是形式本体论，这种形式本体论具有语义完备性和一种演绎（或句法）完备性的特征，在其中产生了一般性的集合论、数论等理论形式。这种形式本体论在数学结构方面接近于布尔巴基学派，而作为演绎系统理论又相关于希尔伯特的形式主义。他认为胡塞尔的观点与构造主义者，特别是直觉主义的数学和逻辑概念几乎没有任何共同之处。[5]Haddock 的观点是一种胡塞尔早期《逻辑研究》中没有经过《形式逻辑和超越论逻辑》补充的纯粹逻辑学观点。

最后要提及的是，Phillip Miller 在其《在场与不在场的数：胡塞尔的数学哲学》中对胡塞尔早期的数学哲学进行了系统总结和分析。通过对在场与不在场数的现象学分析，他认为，胡塞尔的算术哲学的特征是一种形式化的数学哲学。胡塞尔不仅关注初等算术，而且关注作为分析学的高等数学的基础问题。[6]Miller 对胡塞尔数学哲学的分析缺少当代数学哲学问题的基本回应和讨论。

2) 现象学的数学直观理论解释

Parsons 梳理了数学直观的哲学史根源：笛卡尔将直观作为意识对事物的直接认识，而康德区分了时间和空间的直观形式和内容，胡塞尔最后将直观理解为意识的意向性活动。在此基础上，数学直观概念对数学基础产生了影响：康德的直观主义影响了布劳威尔的数学直觉主义和希尔伯特的有穷主义元数学，而胡塞尔的现象学则影响了外

[1] Willard, Dallas. *Logic and the Objectivity of Knowledge*. Ohio University Press, 1984, p. 63.Willard, Dallas. Logic and the Objectivity of Knowledge. Ohio University Press, 1984, p. 63; Mohanty, Jitendra Nath. "Husserl, Frege and the Overcoming of Psychologism." *Philosophy and Science in Phenomenological Perspective*, edited by Kay Kyung Cho, *Phaenomenologica*, vol. 95, Nijhoff, 1984, pp. 145.

[2] Frege, Gottlob. *Kleine Schriften*. Hildesheim: Georg Olms, 1967, p. 192.

[3] Hill, Claire Ortiz. Husserl on Axiomatization and Arithmetic. *Phaenomenologica*, 2010, pp.64-65

[4] Hill Claire Ortiz,"Did Georg Cantor Influence Edmund Husserl?", *dacuozi* 113, no. 1 (1997): 145-170.

[5] Haddock, Guillermo E. Rosado. "Platonism, Phenomenology, and Interderivability." *Phenomenology and Mathematics*, edited by Mirja Hartimo, Springer, 2010, pp. 23-46.

[6] Miller, J. Philip. *Numbers in Presence and Absence: A Study of Husserl's Philosophy of Mathematics*. Phaenomenologica, no. 90, Martinus Nijhoff Publishers, 1982.

尔和哥德尔的数学直观方法。[1]他从哥德尔关于有穷主义数学的直观立场出发[2]，尝试在康德传统中结合现象学的想象直观理论和范畴直观的奠基关系，发展出一种数学直观的理论方案解决希尔伯特元数学中认识论的问题及其困难，[3]在此过程中，Parsons 进一步指出，胡塞尔试图解释在范畴直观中有与感知中的感觉类似的东西时，他陷入了模糊之中，胡塞尔在《第六研究》中从未能充分描述范畴直观行为，而只是通过间接推理论证其存在。[4]Parsons 的学生 Richard Tieszen 和 Mark van Atten 则从数学对象的意识构造、数学证明的意向充实、时间意识的结构分析等多个层面论证了现象学为数学直觉主义进行奠基和辩护的可能性。

Richard Tieszen 批评了将数学直观误解为神秘认识的观点，主张直观作为数学知识的必要条件，并进一步讨论了如何对自然数和有限集合等数学对象进行直观和构造。他认为是对数学知识是如何可能的胡塞尔直观理论的阐释，但却是以某种康德式的论证为基础。[5] Tieszen 认为尽管数学直觉主义和超越论现象学在意识和数学基础方面存在一些共同的哲学立场，但它们在如何理解数学和逻辑的本质方面存在根本的区别：超越论现象学强调观念性和客观性的重要性，而布劳威尔的直觉主义则强调数学知识的主观性和建构性。[6]我们将在本文的第 6 章和第 8 章反驳这一观点。

Mark van Atten 认为胡塞尔的现象学与布劳威尔的直觉主义具有思想上的内在关联。他论证了数学直觉主义中代替连续统的选择序列作为数学对象的合法性，并进一步分析了,布劳威尔关于纯粹数学对象的建构概念与胡塞尔通过超越论主体对这些数学对象进行构造的概念是一致的，这种一致性植根于二者之间相似的内时间的意识结构。[7]他反驳了 Hill、Haddock 等人基于现象学的逻辑学的解释立场对现象学的数学直觉主义立场的反驳，[8]认为现象学的逻辑学解释是一种完全停滞于一种胡塞尔早期的数学逻

[1] Parsons, Charles. “Mathematical Intuition.” *Proceedings of the Aristotelian Society*, *New Series*, vol. 80, 1979-1980, pp. 145-168；Parsons, C.“Intuition in Constructive Mathematics.” In *Language, Mind, and Logic*, edited by J. Butterfield, pp. 211–229.

[2] Gödel, Kurt. “Über die Erweiterung einer bislang unbeachteten finitistischen Perspektive.” *Dialektik*, vol. 5, no. 3, 1958, pp. 45-67.

[3] Parsons, C.“On Some Difficulties Concerning Intuition and Intuitive Knowledge.” *Mind*, vol.102, no.406,1993, pp. 237-239；Parsons, C. “Ontology and Mathematics.” Reprinted in Parsons 1983, pp. 37-60.

[4] Parsons, C. Intuition in Constructive Mathematics, in *Language, Mind and Logic*, edited by Jeremy Butterfield, Cambridge University Press, 1986, 211-229.

[5] Tieszen, Richard. *Mathematical Intuition, Phenomenology, and Mathematical Knowledge*. Kluwer, 1989, pp. 1-20.

[6] Tierszen, Richard. The Intersection of Intuitionism (Brouwer) and Phenomenology (Husserl). *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007)*, edited by Mark van Atten et al., Publications des Archives Henri Poincaré, 2008, pp. 78–95.

[7] Van Atten, Mark. *Brouwer Meets Husserl: On the Phenomenology of Choice Sequences*. Springer, 2007.

[8] Hill, Claire Ortiz. Husserl on Axiomatization and Arithmetic. *Phaenomenologica*, 2010, pp.64-65；Haddock, G. E. Husserl’s Philosophy of Mathematics: Its Origin and Relevance. *Husserl Studies*, vol. 22, no. 3, 2006, p.204.

辑学模式，并未能提供一个关于胡塞尔思想发展的整体性视角或其动机解释。[1] Mark van Atten 将现象学的直观构造完全等同于数学直觉主义基于时间意识的数学对象的构造，尤其是选择序列的现象学解释。然而，他并未全面分析和对比胡塞尔与布劳威尔在时间意识结构以及关于排中律的基本立场上的差异。同时，他也没有进一步探讨海廷（Arend Heyting）所发展的数学直觉主义逻辑与现象学超越论逻辑之间的关联性。我们将在本文的第 5 章、第 6 章展开这项工作。

1.2.2 国外现象学研究中的数学直观进路

前一节我们引述了英美数学哲学传统中 Parsons、Tieszen、Van Atten 对数学认识可能性的现象学直观论证。同时，在当前胡塞尔现象学研究的欧陆传统中，德国科隆胡塞尔档案馆前馆长 Dieter Lohmar 和法国巴黎胡塞尔档案馆馆长 Dominique Pradell 都从不同的角度分析和论证了现象学为数学直观奠基和辩护的可能性。另外 Majer Ulrich、Schmit Roger 也都对现象学、直觉主义、形式主义之间的关系进行了初步的补充性论证。[2]

Lohmar 在其博士论文《数学现象学：基于胡塞尔对数学认识的现象学阐释之要义》中通过范畴直观为形式数学的认识论有效性进行了论证和辩护，同时数学范畴作为现象学的认识论对象，我们还可以检验现象学方法的有效性和充分性。[3] 他认为胡塞尔早期的数学逻辑思想在当代的数学发展中仅仅具有历史性的意义，其贡献在于对数学认识论的一般哲学观点。他以胡塞尔成熟时期的超越论—发生现象学的《形式逻辑与超越论逻辑》《经验与判断》作为考察不同的数学范畴对象的直观、构造和代现问题，[4]这种研究思路在《逻辑研究》中引导他到达了“范畴直观”的概念。他分析区别出了胡塞尔在《逻辑研究》第一版和第二版中关于范畴直观的两种定义。通过第二种“意向性之间的相合性”的范畴直观定义，[5]Lohmar 解释了形式数学的公理系统中数学证明过

[1] Van Atten, Mark. *Essays on Gödel's Reception of Leibniz, Husserl, and Brouwer*. Springer, 2015, pp. 265-268, 252-253.
[2] 另外还可参见Bruno Bentzen在philpapers上编辑的关于数学现象学更新研究：https://philpapers.org/browse/phenomenology-of-mathematics.
[3] Lohmar, Dieter. *Phänomenologie der Mathematik: Elemente Einer Phänomenologischen Aufklärung der Mathematischen Erkenntnis Nach Husserl*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
[4] 进一步的讨论可参见 Lohmar, Dieter. “Zur Allzeitlichkeit Mathematischer Gegenstände: Bemerkungen aus der Sicht der Husserlschen Phänomenologie.”*Philosophia Naturalis*, vol. 25, no. 1-2, 1988, pp. 186-193； Lohmar, Dieter. “Intuition in Mathematics: On the Function of Eidetic Variation in Mathematical Proofs.” In *Phenomenology and Mathematics*, edited by Mirja Hartimo, Springer, 2010, pp. 73–90; Lohmar, Dieter. “On the Relation of Mathematical Objects to Time: Are Mathematical Objects Timeless, Overtemporal or Omnitemporal?”*Journal of Indian Council of Philosophical Research*, vol. 10, 1993, pp. 73–87.
[5] Lohmar, Dieter. *Phänomenologie der Mathematik*. Kluwer Academic Publishers, 1989, pp. 47–50.

程的现象学明证性。Lohmar 试图通过胡塞尔的数学现象学来克服希尔伯特的公理形式主义与布劳威尔的数学直观主义之间的对立，但他认为直观主义的主体概念只是日常经验主体，[1]其整个论题的讨论都集中于胡塞尔数学现象学的论述，但脱离了对数学哲学中基本问题的回应和对话。我们将在本文的第 5 章对 Lohmar 提出的范畴直观的第二章定义进行进一步的发展和应用，而在第 6 章则通过直觉主义的主体性和时间性解释对他的观点进行反驳。

Dominique Pradelle 在其著作《直观与观念：数学对象的现象学》中对数学观念领域的基本范畴概念进行了讨论和质疑。这种讨论既关联到现象学领域内部的动机，也涉及到数学哲学的诸多问题。[2]他从弗雷格的含义与指称的关系出发，提出数学范畴不存在指称层，由此引出感性直观和范畴直观之间类比的合理性和局限性问题。他认为在范畴直观的领域中，数学对象并非以直观给予的方式呈现，而是通过意义的“充实”得到确立。这种充实是一种数学概念的分析过程。因此，数学知识的现象学分析不能仅仅依赖范畴直观的概念，而应转向范畴的意义充实，强调数学意义的分析过程，从而摒弃了对数学对象的“实体化”倾向和直观解释。[3] Pradelle 的数学现象学分析深受法国认识论传统中卡瓦耶斯（Jean Cavaillès）的数学概念认识论的影响，即数学知识的客观性源于其历史性（形式衔接的动态构造过程）而非建立在意识的先验结构上。因此，他对数学形式主义的论述仅仅集中于游戏数学的内涵观点，而忽略了希尔伯特形式主义纲领中元数学的直观内容层面。同时，Pradelle 关于现象学的数学认识论的分析主要集中于数学对象的范畴直观层面，而没有探究数学对象的超越论构造。我们将在本文的第 4 章和第 7 章对元数学的直观理论和数学对象的超越论构造进行讨论。

另外，Majer, Ulrich 认为逻辑主义、直观主义和形式主义的划分是基本上是不完整的，他展示了胡塞尔的现象学是如何在弗雷格的逻辑主义和希尔伯特的形式主义之间找到合适的位置。[4]Schmit 也认为胡塞尔早期的数学哲学存在一种柏拉图主义和构造主义之间存在的张力。因为胡塞尔早期的数学背景是在数学构造主义者克罗内克的影响下开始的，因此产生了一种观念—构造主义的思想，例如只承认潜无限的存在。[5]

[1] Lohmar, Dieter. *Phänomenologie der Mathematik*. Kluwer Academic Publishers, 1989, p. 281.

[2] Dominique Pradelle, *Intuition et idéalités. Phénoménologie des objets mathématiques*, Paris : Presses Universitaires de France, 2020.

[3] Pradelle, Dominique. “Chapitre XI. Niveaux et structures du remplissement catégorial.” *Intuition et idéalités : Phénoménologie des objets mathématiques*, Presses Universitaires de France, 2020, pp. 427-466.

[4] Majer, Ulrich. Husserl and Hilbert on Completeness: A Neglected Chapter in Early Twentieth-Century Foundations of Mathematics. *Synthese*, vol. 110, 1997, pp. 37–56.

[5] Schmit, Roger. *Husserls Philosophie der Mathematik: Platonistische und konstruktivistische Momente in Husserls*

1.2.3 国内现象学研究中的胡塞尔数学哲学研究

倪梁康先生讨论了二十世纪数学基础争论中的现象学问题。他认为形式主义和构造主义的数学争论不仅在希尔伯特和胡塞尔两位老师之间进行，也在希尔伯特与胡塞尔的学生外尔、贝克尔之间进行。希尔伯特要求形式上的完备性、无矛盾性证明（Beweisen），而胡塞尔要求本质上的严格性、相容性指明（Hinweisen）[1]。他用“现象学的直觉主义”“被动的直觉主义”和“主动的形式主义”标识了外尔不同时期的思想。在对贝克尔提出的三种数学构造物：感性直观的对象、范畴直观的对象和所谓“理想陈述”的对象的讨论中，他指出胡塞尔在超越论逻辑中已经给出了一个在希尔伯特形式主义和布劳威尔—外尔的直觉主义之间或在这两者之外的立场解释。张浩军在《形式逻辑和超越论逻辑》一书对形式逻辑的分层结构以及形式数学和形式本体论的关系进行了细致论述，并且讨论了形式逻辑的超越论奠基问题，从前述谓经验的领域为形式逻辑的述谓判断寻找发生学的起源。[2]另外在数学直观和现象学思想之间的研究中，郝刘祥探讨了外尔与胡塞尔的直观理论的思想关联，[3]刘晓力讨论了哥德尔与胡塞尔的直观理论的思想关联。[4]

在现象学早期的数学哲学的国内研究中，高松与奚颖瑞初步讨论了分析的算术化运动，对胡塞尔算术哲学中数的概念系统和符号系统进行了系统的阐释和研究。[5]高松进一步强调了流形论的意义内涵与游戏数学的本质区别。[6]同时，奚颖瑞梳理了胡塞尔早期筹划的事物性现象学尤其是空间性现象学的尝试。钱立卿讨论了几何的公理化运动中希尔伯特与弗雷格关于基本概念的定义之争，并且对维度、流形等空间概念进行了寻求其“构造起源”，再现其“意向起源”的现象学—科学史的探究。[7]

在现象学中后期的数学哲学的国内研究中，陈志远通过范畴的客观性和明见性的讨论，将范畴直观问题回溯到了《算术哲学》中的直观概念和集合联结，指出了范畴

Mathematikbegriff. Bouvier Verlag Herbert Grundmann, 1981.

[1] 倪梁康：《现象学的数学哲学与现象学的模态逻辑——从胡塞尔与贝克尔的思想关联来看》，《学术月刊》2017 年第 49 卷第 1 期；倪梁康：《二十世纪数学基础论争中的现象学》，《中山大学学报：社会科学版》2016 年第 4 期；

[2] 张浩军：《从形式逻辑到先验逻辑：胡塞尔逻辑学思想研究》，首都师范大学出版社，2010 年。

[3] 郝刘祥：《外尔的哲学思想与其数学物理研究之间的关系》，《科学文化评论》2006 年第 5 期。

[4] 刘晓力：《哥德尔与胡塞尔的现象学》，《自然辩证法通讯》2001 年第 1 期。

[5] 奚颖瑞：《数学、逻辑与现象学》，浙江大学出版社，2018 年。

[6] 高松：《形式化作为现代科学发现的秘密——以虚构数问题为线索》，《哲学分析》2021 年第 2 期。

[7] 钱立卿：《空间维度的构造现象学分析——论二维空间概念的构造》，《哲学分析》2024 年第 15 卷第 4 期；《论希尔伯特公理化方法的哲学意义》，《哲学分析》2022 年第 13 卷第 4 期。

代现的困难中的心理联结，以及从范畴直观到本质直观的转变。[1]何浩平结合 Richard Tieszen 的观点，探讨了胡塞尔现象学中数学对象的本体论特征与数学直观及其可错性问题。[2]陶建文则借助于胡塞尔的数学现象学对数学实在论做了辩护。[3]马迎辉讨论了范畴直观中范畴代现的实显性困难以及滞留的双重意向性与直观的关系，[4]尤其是在现象学的语境中提及了布劳威尔的“二一性”时间意识结构。

现象学与逻辑主义之间的关系，尤其是弗雷格对胡塞尔的心理主义批评的不充足性，以及胡塞尔对弗雷格关于数的外延性定义的批评学界已经有了成熟的研究。李义民系统地比较了胡塞尔和弗雷格的内函数与外延数。[5]倪梁康从现象学与分析哲学的起源的角度出发，梳理讨论了胡塞尔的《算术哲学》与弗雷格的《算术基础》中关于心理学分析的争论，[6]也讨论了 Føllesdal)和 Mohanty 的两部同名著作《胡塞尔与弗雷格》之间观点的分歧。[7]在本文的论域中，对现象学与逻辑主义之间的关系不再做进一步的论述。

1.3 问题思路与文章结构：从形式建构到直观构造

胡塞尔的数学现象学可以通过形式建构（Construktion）与直观构造（Constitution）的双重进路展开[8]：（1）分析胡塞尔算术哲学中的思想张力结构，以及它在数学基础发展中的哲学根源；（2）运用超越论现象学的直观构造理论，重新处理胡塞尔早期未完成的数学问题，对现象学视域中的数学认识论问题进行统一的解读。（3）通过超越论现象学的数学认识论，对数学哲学中直觉主义与形式主义之间关于数学对象的本体论争论提供一种数学现象学的解释方案。

1 陈志远：《胡塞尔范畴代现的理论失败之谜》，《哲学动态》2010 年第 2 期，第 61-69 页。

2 何浩平：《对数学对象的“理念性”意义的现象学建构分析》，《江苏社会科学》2016 年第 5 期；《胡塞尔现象学中的数学直观及其可错性问题》，《自然辩证法研究》2016 年第 32 卷第 3 期。

3 陶建文：《数学实在论的现象学辩护》，人民出版社，2007 年。

4 马迎辉：《时间性与思的现象学》，江苏人民出版社，2020 年，第 36—46 页。

5 李义民：《数的本质：弗雷格与胡塞尔之争》,华东师范大学博士论文，2016 年。

6 倪梁康:《现象学与分析哲学的起源——关于胡塞尔与弗雷格的思想关系的回顾与再审》. 载于《中国学术》第三十四辑，，商务印书馆，2015 年，第 1－7 页。

7 Føllesdal, Dagfinn. *Husserl und Frege: Ein Beitrag zur Beleuchtung der Entstehung der phänomenologischen Philosophie.* Oslo: Ikommisjon hos Aschehoug, 1958; Mohanty, J. N. *Husserl and Frege*. Bloomington: Indiana University Press, 1982.

8 在本文的讨论中，为避免混淆，不会使用胡塞尔现象学中的直观（Intuition）一词替代布劳威尔数学直觉主义中的直觉（Intuition），二者都是时间性和意识构造（Constitution）的意义上使用。进一步地，我们也只在希尔伯特意义上，通过形式系统对数学对象的一致性定义而使用建构 (Construction)一词。

1.3.1 胡塞尔数学哲学中直观构造与形式建构的张力结构问题

论文的第一部分由第 2 章组成，主要分析胡塞尔早期数学哲学中直观构造与形式建构的张力结构问题。我们将首先分析胡塞尔数学背景中柏林数学学派的分析的算术化运动与哥廷根数学学派的几何的公理化运动的引发的数学哲学问题。分析的算术化使得虚构数的概念和意义问题开始显现，而几何公理化的形式系统定义则彻底分离了几何概念与对象直观之间的关系。

在数学对象的概念、意义和对象的认识论框架下，我们将在第 2 章的第一部分分析胡塞尔的柏林数学学派的数学背景和思想根源。首先阐述他的博士论题中关于物理现象的极值求解和边界条件的变分法研究，然后通过微积分的形而上学问题争论，分析胡塞尔的算术哲学方案。魏斯特拉斯—波尔查诺引导的严格分析的算术化运动用ε-δ的极限定义取代了无穷小量 dx，将微积分的基础归结于对自然数概念的定义和分析。胡塞尔结合魏尔斯特拉斯的算术化进路，并运用布伦塔诺对本真和非本真表象的区分，对数概念的起源和内容进行了心理学和逻辑学层面的分析，提出了基数构造理论与符号定义系统两种方案解决微积分的形而上学问题争议。但是数概念的构造系统与符号定义系统之间的奠基关系的不对称性无法解决数系扩张中虚构数的难题。

我们将在第 2 章的第二部分分析胡塞尔与哥廷根数学学派的思想关联。为了解决数概念起源中虚数的存在性难题，胡塞尔与希尔伯特在哥廷根数学学会上分别以哲学的方式和数学的方式提出了两种不同的“完备性”概念。胡塞尔的完备性概念基于相对完备性与绝对完备性的流形论方案及其限定性解释。虽然胡塞尔将绝对完备性的流形论等同于希尔伯特意义上的完备性。但是希尔伯特的完备性是一种满足一致性定义的句法完备性，而胡塞尔的完备性则是一种蕴含意向性和模型论解释的语义完备性。

通过第 2 章对数概念的构造系统与符号定义系统之间以及两种流形论之间的不对称性关系的分析，我们可以得出这种不对称性隐含着胡塞尔的数学背景中分析的算术化引起的数的概念的直观构造问题与几何的公理化导向的形式建构之间的张力结构。

1.3.2 数学对象的现象学认识论分析：从形式建构到直观构造

论文的第二部分由第 3 章、第 4 章、第 5 章、第 6 章组成，主要是从超越论现象学的数学认识论出发解释数学形式主义与数学直觉主义之间关于数学对象存在问题的争论，并对外尔的论题及其分论题进行逐一反驳。我们已经在 1.1.3 节从形式主义、直觉主义和现象学立场出发，对外尔的论点进行了重构：

P1. 如果希尔伯特的形式主义（H）战胜布劳威尔的直觉主义（B），那么布劳威尔的直觉主义（B）不能为经典数学提供基础（¬BB）。

P2.布劳威尔的直觉主义（B）可以等同于现象学的直观构造理论（B≡P）

P3. 现象学的直观构造理论（P）可以为数学提供基础（PB）。

结论 C: 希尔伯特的形式主义（H）战胜了布劳威尔的直觉主义（B），因此，现象学的直观构造理论（P）不可以为数学提供基础（¬PB）。

对于 P1 的数学认识论反驳，我们需要在第 4 章深入地理解希尔伯特的公理化思想，分析元数学的直观理论，从而在根本上反驳将形式主义数学流俗地理解为一种游戏数学，并简单地将其与数学直觉主义进行对立。在布劳威尔、外尔、庞加莱对希尔伯特的形式主义进行批评之后，希尔伯特在元数学中引入了康德的直观理论，提出了一种先于逻辑与运算的数学直观。他认为形式数学的有效性最终由元数学的“具体笔画符号的纯粹直观基础”所保证。但是这种元数学的直观认识论问题的哲学辩护在当时受到了新康德主义学派中的尼尔森（Leonard Nelson）、穆勒（Aloys Müller）以及现象学传统中贝克尔的批评。我们将通过当代数学哲学中 Parsons 提出的构型—类型的数学直观方案解决上述问题。这种数学直观方案是在现象学中感性直观与范畴直观的奠基关系与想象理论的基础上发展形成的。

对于 P2，我们将论证数学直觉主义虽然致力于具体的数学对象的意识构造，但是它缺少严格论证的哲学基础；而胡塞尔的超越论现象学致力于严密的哲学体系的构建，但同时缺少具体的数学应用。我们将在第 3 章、第 5 章、第 6 章从现象学的数学认识论的分析和解释出发为数学直觉主义提供一个合理的哲学论证基础：

（1）讨论数学对象的范畴直观的认识论解释

（2）进行本质变更的数学应用分析。

（3）通过现象学的内时间意识和意向充实理论对直觉主义的数学对象构造和逻辑命题证明进行论证和辩护。

在上述框架内，我们在第 3 章以无感性内容、全时性、无对象性作为认识特征的数学对象的范畴直观问题。我们首分析三种范畴对象的本质类型以及与之相关的给予方式：经验范畴对象（总体化）、混合范畴对象（理想化）、纯粹范畴对象（形式化），在此基础上，我们分析三种不同的数学对象构造类型：

(1) 可以被理想化的感性直观所把握的构造，例如欧几里得几何中的具体图形；

(2) 可以被范畴直观所把握的构造，例如非欧几何中一般的数学形式对象，

(3) 在逻辑上可以无矛盾地建构，但无法通过范畴直观把握的数学对象。

在对范畴对象进行分析之后，我们讨论胡塞尔关于范畴直观的两种定义：对象直观层的奠基性定义和意义充实层的分节的相合性定义。我们将通过范畴直观的第二种定义讨论（3）的数学范畴在公理数学证明中的认识论意义，并对本质变更进行具体的数学应用。

第 5 章首先比较布劳威尔与胡塞尔关于时间意识结构的相似性与数学对象的全时性观点，并据此解释胡塞尔对于基数的构造和布劳威尔对于序数的构造不同。在此基础上，我们将在第 6 章讨论布劳威尔的学生海廷通过胡塞尔的学生贝克尔在直觉主义的形式化逻辑命题中对意向充实理论的进一步发展，并且进一步分析胡塞尔超越论逻辑中的真理逻辑和一致性逻辑对形式主义逻辑和直觉主义逻辑的兼容性，从而反驳 P2 并对 P3 进行支持论证：胡塞尔认为现象学作为第一哲学，在现象学框架下奠基并被建立的先验学科（例如数学）不会存在悖论和基础危机。[1]

1.3.3 数学对象的超越论构造：以康托尔的超限数为例

论文的第四部分由第 7 章组成，对 P3 的继续辩护和论证将通过胡塞尔和贝克尔以自然数、康托尔的超限数为例的数学对象的超越论构造中展开。贝克尔通过胡塞尔现象学中意向性迭代和视域层级对超限数的构造，旨在通过与潜无限相关的具体现象学经验来为超限序数提供基础，将超限概念将通过诉诸潜无限来证成。他拒绝了希尔伯特对康托尔超限数的形式建构的数学辩护，而是从布劳威尔基于潜无限的直觉主义出发，尝试通过胡塞尔现象学的意向构造为康托尔的超限数进行本体论的辩护，从而为直觉主义中数学对象的意识构造的有效性存在和形式主义中数学对象的形式建构的无矛盾性存在之间的争议提供现象学的解决方案。

我们将首先分析和论述胡塞尔在《观念 I》第 100-101 中关于反思意向性的迭代关系和视域层级的嵌套结构作为数学对象的超越论意识构造的基点。在完成胡塞尔关于反思的意向性迭代和潜无限的意识构造的分析之后，我们将指出胡塞尔的反思不仅仅停留在单个线性序列中 n 个可数无限的反思意向性中，更重要的是它涉及对整体视域层级结构的迭代反思。由此论证胡塞尔超越论意识现象学可以作为康托尔超限数的两个生成原则的本体论基础。贝克尔将康托尔超限数的两个生成性原则与胡塞尔的线性反思迭代和视域层级的意识构造对应。贝克尔的基础上，我们将论证第一个生成原则

[1] Hua IX, S. 297.大英百科全书第四版关于现象学的词条。

对应于从当前的反思阶段β的反思过渡到下一个反思阶段β+1，也就是每次新的反思都必然建立在前一次反思的基础之上，这是一个基本的、直接的反思层级。第二个生成原则对应于我们从无限嵌套的反思迭代序列推进到它们的极限或边界，是一种以对线性指向的迭代反思为基础的整体迭代反思。为了进一步的解释，我们将通过图像的自似性和嵌套结构来直观地说明反思意向性迭代方式，并在此基础上阐释超限数的意识构造。

在本章的最后，我们将讨论超限序数的两个生成原则的现象学构造中存在两个问题：一是我们如何从第一生成原则的可数无限的反思跃迁到超限的反思；二是如何解决第二生成原则中的超限反思阶段中反思中的匿名者与最大序数悖论问题。我们将结合外尔基于希尔伯特和布劳威尔关于超限数的立场，反驳贝克尔建立在有限直观基础上的超限数的可理解性，认为“超限的意识视域”既无必要也无法展示。贝克尔对这一批评分别在哲学和数学上进行了回应，他认为纯粹意识中超限结构（transfinite Struktur）的现象学阐明，其意义在于澄清数学超限理论的本体论结构，而非直接推动集合理论本身的发展。

1.3.4 数学对象的存在论解释：贝克尔的预示现象学的提出

我们将在第 8 章从数学对象的超越论构造性解释进入对数学对象和数学认识的时间性和存在论解释。一致性的建构定义和可直观的构造性定义只能保证数学对象存在的问题，但无法解决数学存在的问题。贝克尔认为理解数学的历史起源是理解数学存在的哲学前提。我们首先分析和论述贝克尔所提出的数学直觉主义和形式主义的两种数学认识模式的历史性传统：直觉主义与形式主义之间的对立植根于亚里士多德—康德的批判数学哲学与柏拉图—莱布尼茨的数学神秘学传统。进一步的分析表明，这两种数学认识的对立产生于对生活本身的人类学理解与绝对认识的观念论之中。因此，我们可以将数学存在嵌入人类实际性和历史性此在的相互关系中。

我们接下来从数学认识模式的历史性解释转向数学对象的存在论解释学，以自由选择序列和超限数为例，阐明贝克尔的数学实存观点：人类的实际生活也是数学的本体论基础。数学认识的理性活动是为了克服此在的历史性和死亡的畏惧而无限进行的自身遗忘的演绎游戏：从数学的意识活动（noetisch）的方面来看，数学活动满足于一种内在的封闭性要求，而从数学的“事实性”（Sachlichkeit）来看，则不需要将意识超越于演绎系统自身以外的超越的客观性中进行证明。过无限的演绎进程，好像数学

认识就能够以某种方式“接近”或“揭示”实无限或者超限结构，从而带来一种克服此在历史性问题和死亡作为最极限的存在方式的幻相。因此，数学家的自身遗忘不仅意味着是对此在的实际性生活的遗忘，而且同时也是对数学存在自身的遗忘。

通过在对数学对象的构造性和存在论的分析解释之后，我们将论述贝克尔的预示现象学。一方面，希尔伯特的形式主义数学在本体论上无法通达自然实在；另一方面，在人类经验的范围内，数学直觉主义以及更广泛意义上的现象学构造主义在认识论上无疑是正确的，但是形式主义数学中的不可构造性部分在自然科学中的应用展现了构造主义的局限性。因此，数学对象的胡塞尔式的纯粹意识构造和海德格尔式的人类学解释并不能完全解释数学形式主义中不可构造但确实有效的部分。贝克尔通过柏拉图—莱布尼茨的神秘学传统，针对形式主义数学中直觉主义不可构造的有效性部分与自然结构的和谐一致性问题，提出了一种“预示”（Mantische）现象学，并指出在自然结构与数学精神之间存在着深层而神秘的和谐关系，这种认识无法通过认识论主体的意识构造与此在诠释（Auslegung）进路完成。

我们将在最后讨论曼科基于希尔伯特—莱布尼茨的立场对贝克尔关于数学实存的海德格尔解释和进一步发展的预示现象学的批评。同时论述贝克尔对此批评意见的反驳，他区分了包含构造现象学和解释现象学的人类—直观主义的数学与包含预示现象学的形式主义—符号主义数学，认为后者是主动的、生产性的认识。这种认识不依赖于任何给予内容，自由地创造观念的形式世界，然后再选择形式系统中相合的可以作为物理学的概念框架。在此基础上，我们将运用胡塞尔的理性目的论对这种预示现象学的认识论不充足性展开批评。

第 2 章 胡塞尔早期数学思想中直观构造与形式建构的张力结构

有一次他曾说：我从魏尔斯特拉斯那里得到了我的科学追求的伦理志向。[1]

——玛尔维娜

但是在哥廷根，大学的精神生活与哈勒大学有着完全不同的特质，特别是数学家克莱因与希尔伯特，他们将胡塞尔带入自己的圈子并且鼓励着他。[2]

——玛尔维娜

2.1 引言

我们将在本章阐明十九世纪数学基础图景变革中的现象学开端问题。目前学界对现象学的数学起源的解释可以总结为两条解释路径。第一种解释以胡塞尔所属的柏林数学学派的分析的算术化为背景，Hartimo、Miller、Willard、Hill 等人认为胡塞尔现象学的开端完全归属于十九世纪由波尔查诺、魏尔斯特拉斯、康托等人进行的严格分析的算术化项目。[3]而第二种解释则以胡塞尔参与的哥廷根数学学派的几何的公理化为背景，Peckhaus、Haddock、Morales 则认为高斯、黎曼、希尔伯特的几何学的公理化进路对现象学的开端乃至形式本体论非常重要。[4]本文将在批评这两种方案的单一化解释的基础上，关注十九世纪数学基础变革中几何与算术知识发展的认识论不对称性及其哲学后果。首先是胡塞尔的老师魏尔斯特拉斯和克罗内克主导的严格分析的算术化运动，目的是清除微积分中无穷小量的几何直观解释与作为算术知识之基础的时间直观形式的心理学解释。其次是高斯、波约尔、黎曼兴起的以可测量性为特征的非欧几何对以先天性为特征的传统欧式几何学的挑战与逻辑同构，[5]最终希尔伯特通过公理化运动将

[1] 玛尔维娜·胡塞尔：《胡塞尔生平素描》，倪梁康译，《中国现象学与哲学评论》2016 年第 2 期，第 1-24 页。
[2] Brief. IV, S. 22.
[3] Hartimo, Mirja. “The Development of Mathematics and the Birth of Phenomenology.” *Phenomenology and Mathematics*, Springer, 2010, pp. 107-121; Miller, Philip J. *Numbers in Presence and Absence: A Study of Husserl’s Philosophy of Mathematics*. Martinus Nijhoff Publishers, 1982; Willard, Dallas. *Logic and the Objectivity of Knowledge*: A Study of Husserl’s Early Philosophy. Ohio University Press, 1984; Hill Claire Ortiz,“Did Georg Cantor Influence Edmund Husserl?”, *dacuozi* 113, no. 1 , 1997, pp. 145-170.
[4] Volker Peckhaus, *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*, Göttingen 1990; Rosado Haddock, G.E. “Husserl and Riemann.” Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics, edited by S. Centrone, vol. 384, Synthese Library, Springer, 2017, pp. 229-243; Morales, Alberto. “From Grassmann, Riemann to Husserl: A Brief History of the Concept of Manifold.” , 2019.
[5] 施通普夫与胡塞尔特别是胡塞尔对欧几里德的第 5 平行公设的论述的描述以及非欧几何部分（波约尔，罗巴切夫

几何的不一致性问题还原为算术问题的不一致性而结束。[1]这种不对称性认识动摇了康德数学哲学范式中作为数学基础的先天的空间和时间直观形式的基本预设，使得数学对象的直观、概念和意义成为问题：算术化运动中实数系的结构的完善使得数的概念和意义问题开始显现，而几何公理化的形式系统定义则彻底分离了对象与直观之间的关系。[2]

以此为背景，我们将在本章首先分析胡塞尔算术哲学中，本真数的概念构造系统与以虚构数为代表的非本真数的符号定义系统之间的奠基关系的不对称性关系。进一步分析为解决虚构数字难题，胡塞尔在哥廷根数学学会上提出的相对限定性与绝对限定性的两种流形理论之间的不对称性关系。这种不对称关系反映了胡塞尔早期数学哲学中存在着直观构造与形式建构的张力结构。这种张力结构隐含在胡塞尔数学背景中柏林数学学派与哥廷根数学学派之间的认识论不对称性：一方面是魏尔斯特拉斯、克罗内克的分析算术化引起的数概念的直观构造，另一方面是希尔伯的几何的公理化运动导向的形式化公理建构。

2.2 胡塞尔与柏林数学学派：从变分理论到分析的算术化运动

胡塞尔的数学和哲学研究起源于柏林数学学派的数学传统。他在 1880 年开始博士研究时，受教于魏尔斯特拉斯（Weierstrass）和克罗内克（Kronecker）、柯尼希伯格（Koenigsberger）。魏尔斯特拉斯几乎只从事分析工作，库默尔（Kummer）和克罗内克则专注于代数和数论[3]。魏尔斯特拉斯强调将算术方法作为函数论构造的基点，尤其是幂级数的还原工作，通过有限次的运算得到有理数，通过无限次的运算产生幂级数。克罗内克坚持代数的算术化，认为一切数学的结果必须要用整数性质的形式表达。[4]他们都反对几何和经验直观作为数学的基础，坚持分析学的严格化，坚持认为算术在数学认识论上的首要地位。算术化运动在 19 世纪经过戴德金、魏尔斯特拉斯、康托尔的

斯基）高斯的曲率理论与阿贝尔在代数方程理论方面的比较，以及高斯的曲率理论到黎曼流形的发展问题（Hua XXI，S. 318-322,同时这也是施通普夫的教职内容的部分研究）。

[1] 1900 年在巴黎举行的国际数学大会上，希尔伯特总结道。“几何思维和算术思维之间的重合进一步揭示了这一点：在算术研究中，以及在几何考虑中，我们并不是每时每刻都要把推导的链条追溯到公理上”；进一步说。“<.....>几何学公理的不矛盾性被简化为对算术学公理的不矛盾性的证明。” 进一步的讨论见本文第三章。

[2] 钱立卿，《论希尔伯特公理化方法的哲学意义》,《哲学分析》2022 年第 4 期。

[3] 胡塞尔的老师克罗内克和魏尔斯特拉斯以及康托尔的研究起点都是椭圆函数与相关的级数理论。

[4] 克罗内克主张算术为基础的有限主义构造立场，并反对使用魏尔斯特拉斯和康托儿使用极限、无穷级数和超限数，反对将数学发展到完全脱离可构造性的形式主义层面。舒曼（K. Schuhmann）认为不应忽视克罗内克对胡塞尔的可能影响。胡塞尔在谈到他在柏林的早年时写道：“魏尔斯特拉斯教授和克罗内克教授对我产生了持久的影响”。此外，据称胡塞尔通过克罗内克对笛卡尔产生了第一个兴趣。Cf. Husserl Chronik, S. 6-7.

数学工作彻底完成，但同时也在数学基础概念中引入了无穷概念。在其早期的数学研究中，胡塞尔的博士论文《变分法论稿》[1]和教职论文《数概念的起源：一项心理学的研究》[2]的论题是魏尔斯特拉斯和克罗内克所领导的柏林数学学派的两个主要研究领域：分析学及其算术化运动。其次，胡塞尔的博士论文导师柯尼希伯格和教职论文的审核人康托尔也都是魏尔斯特拉斯的学生[3]，这种学术谱系关系决定了胡塞尔的数学及哲学研究与柏林学派的数学传统存在直接的学术谱系关系：

> 在数学方面，尤其是魏尔斯特拉斯和克罗内克教授对我产生了深远的影响，我成为他们的学生。伟大的魏尔斯特拉斯培养了我想为数学彻底奠定基础的兴趣。我了解到了他对变分学的巨大贡献……他从根源分析出发，试图推导出基本的概念和公理，并以此为基础，用一种完全严密的方法来构建整个分析体系。[4]

胡塞尔分别在柏林大学（1878—1881 年）和维也纳大学（1881—1883 年）完成了数学学业和博士论文研究。胡塞尔在柏林大学学习了六个学期，追随魏尔斯特拉斯学习解析函数论、Abel 函数论、椭圆函数论、变分学等课程，并做了大量笔记。根据舒曼编撰的《胡塞尔年鉴》，胡塞尔课程笔记的顺序如下：

(1) 解析函数理论导论；应用阿贝尔函数解决几何问题（魏尔斯特拉斯，1878 年春季学期）

(2) 椭圆函数理论导论（魏尔斯特拉斯，1878/79 年冬季学期）

(3) 代数方程理论讲座速记本（克罗内克，1878/79 年冬季学期）

(4) 变分函数计算讲座（魏尔斯特拉斯，1879 年夏季学期）

(5) 解析函数理论（魏尔斯特拉斯，1880/81 年冬季学期）

(6) 变分计算理论（魏尔斯特拉斯，1879 年春季学期）

(7) 一本对魏尔斯特拉斯变分计算理论讲座阐述的笔记本（1880），首页上带有标记：1880。胡塞尔。胡塞尔采用了它来完成他对魏尔斯特拉斯关于变分计算理论的讲座

[1] Husserl, Edmund. Beiträge zur Theorie von Variationsrechnung. Unpublished dissertation. University of Vienna. 1882. 该手稿在胡塞尔档案中编号为 K VI 3,是原始论文的复印件，手稿中的第 43-44 页已经缺失。原始文件由维也纳大学图书馆以编号 H 1882 PN 268 收藏。

[2] 胡塞尔在 1887 年 6 月完成的教职资格论文。考察的相关文件被收藏在哈勒大学档案馆哲学系，《报告》第 21 期，第 139 号：其中康托尔对数学方面的考察认定为满意。

[3] Hill, Claire Ortiz. “On Husserl's Mathematical Apprenticeship and Philosophy of Mathematics.” *Analecta Husserliana* 80 (2002): 78–93.

[4] Husserl Chronik, S. 7.

的阐述。

2.2.1 魏尔斯特拉斯的变分学理论与胡塞尔的博士论题

胡塞尔在维也纳大学（1881-1883 年）完成了他的博士论文。[1]其中，魏尔斯特拉斯 1879 年春季学期的变分法讲座正是促使胡塞尔选择变分理论作为博士论文的主要原因。

> 我（在莱比锡学习了三个学期之后）于 1878 年夏季学期来到柏林，在那里听了五六个学期的魏尔斯特拉斯的全部讲座 （也听了克罗内克、基尔希霍夫等人的讲座），也是研讨课的成员。我当时过于骄傲，不想让人给我指定一个博士论文题目，而我折磨了自己很久才找到一个自己能做的题目。现在我已经无法对此进行更为详细和确定地叙述了。它的题目叫作“变分计算理论文稿（**魏尔斯特拉斯仔细讨论了第一个问题**）”，而且是从魏尔斯特拉斯关于变分法讲座的思考范围中得出的，其中也分析批判了一些对迈耶尔（A.Meyer）二阶变分理论的原先十分著名的阐释。可惜当时在维也纳还没有对论文的强制付印要求，而这个研究就丢失了。[2]

但是胡塞尔并非在魏尔斯特拉斯的直接指导下获得博士学位。从 1881 年夏季开始，胡塞尔前往维也纳参加柯尼希伯格的讨论班，而柯尼希伯格是魏尔斯特拉斯的学生。在与其学生曼科的交流中，胡塞尔解释了自己为何最终选择在魏尔斯特拉斯的学生柯尼希伯格所在的维也纳大学而非在魏尔斯特拉斯所在的柏林大学完成博士学位的原因：

> 我之所以没有在柏林进行博士论文考试， 原因在于我的亲密朋友阿尔布雷希特在我之前曾征询过魏尔斯特拉斯的意见，而魏尔斯特拉斯认为，作为奥地利人，阿尔布雷希特在奥地利会有更好地在学校与学院发展的机会。对于作为犹太人的我（我在高年级时才转而信仰基督教）来说，[3]这一点在那个反犹主义刚刚兴起的年代则尤为有效。因此我回到我的家乡， 亦即回到维也纳，在这里担任讲席教授的是魏尔斯特拉斯原先的学生柯尼希

[1] Biermann, Karl-Reinhard. “Did Husserl take his doctor's degree under Weierstrass’s supervision?”. *Organon* [Warsaw] 6. 1969. p. 261–264.

[2] 胡塞尔：《胡塞尔 1933 年 5 月 4、5 日致迪特里希·曼科的信》，倪梁康译，载《世界哲学》，2012 年，第 6 期，第 132-139 页。这份书信的动机是胡塞尔的学生曼科祝贺他获得博士学位 50 周年，胡塞尔在 1883 年 1 月 23 日获得博士学位。实际上，胡塞尔的博士论文保存在维也纳大学图书馆并没有丢失。引文中黑体字号为作者强调所加。

[3] 胡塞尔于 1886 年 4 月 26 日在维也纳受洗。

伯格， 他待我也非常友善，并且对我的工作十分满意。由魏尔斯特拉斯的学生哥尼斯贝格担任导师，他对我的研究工作表示赞赏。但我自己对此却并不特别满意。[1]

胡塞尔博士的论题是二阶变分理论，主要涉及对雅可比条件的推导，确保在变分法中实现极值条件的新的理论基础。这是从 19 世纪 30 年代到 19 世纪末变分法中的一个重要环节。在 1882 年 10 月 2 日，维也纳哲学系主任委托柯尼希伯格（Koenigsberger）和韦伊（Emil Weyr）担任胡塞尔博士论文的第一审阅者（Referent）和第二审阅者（Coreferent）。到了 11 月 29 日，他成功地完成了论文答辩，魏尔斯特拉斯对其变分法的研究论文给予了认可，并在 1883 年夏天答辩成功后立刻聘请他为助手。

博士毕业后，我回到柏林，在那里专门为魏尔斯特拉斯工作，即替他编写了 26 节阿贝尔函数的讲座[2]，他非常感谢我。它可能会被用在魏尔斯特拉斯的作品中。直到一年后，我才放弃继续我扩充论文的打算，去哈勒进行教职论文的答辩，然后我加入了布伦塔诺。[3]

胡塞尔在博士变分法论文完成后重新返回柏林大学担任魏尔斯特拉斯的助手，负责编辑魏尔斯特拉斯著作全集第七卷关于极大极小值的变分理论，[4]并与马瑟尔（H.Maser）共同整理了 1879 年魏尔斯特拉斯的变分学讲义。魏尔斯特拉斯的这部分关于变分学的讲义笔记是胡塞尔的博士论题变分计算的直接来源。胡塞尔自己关于这些讲座的笔记以及其他一些笔记被用于编纂这个版本。

胡塞尔所记录的魏尔斯特拉斯的变分法讲义主要处理两个问题：极大、极小值理论和变分方法。魏尔斯特拉斯仔细讨论了第一个问题中单变量和多变量函数的极值问

[1] 胡塞尔：《胡塞尔 1933 年 5 月 4、5 日致迪特里希·曼科的信》，倪梁康译。

[2] 胡塞尔或许记错了具体的内容，参见卡尔·魏尔斯特拉斯：《数学作品》第四卷：关于阿贝尔超越数理论的讲座，1902 年柏林出版，《前言》，第 V 页。

[3] Karl Schuhmann 在关于胡塞尔年鉴和生平的文献中也记载了胡塞尔博士论文发表事由的情况："维也纳当时的博士生规定没有强迫我立即发表论文，所以我推迟了论文的发表，我已经在事实上进行了研究，想对此进行实质性的扩充，从而能够发表一个更大的整体。然而，不久后我转而专心研究哲学，我对这个计划就搁置了。"Husserl-chronik , S. 11.胡塞尔在 1933 年 5 月 4、5 日写给迪特里希·曼科的信中也提到了这一点。

[4] 魏尔斯特拉斯很少发表自己的讲座，1889 年决定发表他的著作全集。1894 年《全集》第一卷问世；第二年,《全集》第二卷出版，这两卷都经过魏尔斯特拉斯本人的审核。当准备出版第三卷时，魏尔斯特拉斯去世。按照魏尔斯特拉斯最初的计划，阿贝尔超越函数理论应给予重视，因此第四卷先于第三卷，在 1902 年出版了。1903 年出版了第三卷、1915 年 ,出版第五卷《椭圆函数论讲义》、1902 年出版六卷《椭圆函数论在几何与力学中引用》、1927 年第七卷《变分法讲义》出版后中断。原因是参加魏尔斯特拉斯课程并有笔记、且能胜任《全集》编辑工作的学生大都已去世，数学中心也从主导算术化的柏林转向了几何公理化的哥廷根。

题，二次型理论，以及带有辅助条件的极值问题，第二个问题则深入分析了变分法中的一些经典问题，如最小面积旋转面、等周问题，并提出了著名的雅可比准则，这是判断变分问题解的存在性的重要依据，为判断极值问题的解的存在性提供了充分条件。[1]

魏尔斯特拉斯处理的雅可比条件是胡塞尔博士论文的切入点。胡塞尔在他的博士论文中讨论了最简单情况下的二阶变分理论，这一讨论是以一个只包含一个因变量且变分积分中仅出现一阶导数的情形为起点的。他的目标是探究雅可比理论的逻辑基础，并在此基础上建立一个更加一般化的框架。

变分法是数学分析中的一个重要分支，其核心问题是在给定约束条件下，确定未知函数的形式，使得依赖于该函数的积分达到极大或极小值，从而寻找最优解，如最小作用量原理、最短路径等问题。其中一阶变分和二阶变分则是判断极值存在性的必要条件和充分条件。在 19 世纪后期之前，数学家对必要条件和充分条件之间的区别缺乏明确认识。在尝试证明某问题性质会导致一个给定条件时，他们通常预设满足该条件即可解决问题。然后事实证明结果并非如此，他们则转而寻求更多条件，而非反思条件本身。胡塞尔在他的博士论文中从作为极值存在的必要条件的欧拉-拉格朗日方程开始，探讨了作为极值存在的充分条件的二阶变分理论，通过特定的变换使二阶变分达到简单形式，从而更容易判断其符号（正或负），进而确定极值的存在性和稳定性。

在该论题域内，胡塞尔将博士论文分为了三个部分：

（1）关于一般变分法理论的简单问题的阐明。胡塞尔从勒让德（Legendre）对最简单变分问题的二阶变分的转换的讨论，分析了对雅可比（Jacobi） 关于二阶变分的关键见解。（第 1-21 页）[2]

（2）从克莱布什（Clebsch）和雅可比的二阶变分变换中推导出判别式。对迈耶尔（Mayer）在二阶变分研究中的贡献进行了评估。胡塞尔认为迈耶尔在二阶变分研究中取得了决定性的理论突破。他还对迈耶尔的理论进行了重要的改进，并提供了一个通用而简单的方法，用于选择在迈耶尔的二阶变分转换中所需的常数。[3]（第 22-42 页）

（3）极值存在的条件。证明了在拉格朗日的一般问题中雅可比条件的必要性，尤

[1] 参见 Weierstrass, Karl. *Vorlesungen über Variationsrechnung*，前言部分。

[2] 文本对应页码为胡塞尔未出版的德文版博士论文，具体内容可见本文附录一所翻译的公开出版的胡塞尔法译版博士论文。

[3] 这一部分相关的数学史研究可参见 Fraser, C. "Edmund Husserl's Contributions to the Second Variation in the Calculus of Variations." *Serva di due padroni: Saggi di storia della matematica in onore di Umberto Bottazzini*, edited by Alberto Cogliati, Egea, 2019, pp. 263–289.

其是引用了魏尔斯特拉斯变分法中极值的判断和共轭点的定义解。（第 48-66 页）。

2.2.2 微积分的形而上学问题与数概念的起源

胡塞尔将早期的数学哲学研究视为现象学的突破点，[1]该突破点旨在对十九世纪数学分析传统中无理数与无穷小量引发的微积分的形而上学问题提出一种奠基性方案[2]。在《算术哲学》的导言中，胡塞尔首先阐明了现象学开端的哲学任务：

> 或许我的努力并非无用，至少在某些基本点上，我将成功地为真正的微积分哲学铺平道路，那是数个世纪以来的愿望。[2]

从十七世纪到十九世纪，微积分基础中关于数学对象的本质和数学知识的性质的问题几乎构成了整个数学哲学的历史。胡塞尔对此认为无理数、连续性、极限、无穷小量这些虽然具有运算有效性的概念但根本上缺乏逻辑严格性，需要进行哲学辩护 ：

> 关于微积分的基本概念的解释，情况甚至更糟：有些人将微分解释为零，有些人将微分解释为介于在存在与非存在之间的实体，有些人则将微分解释为向一个有限量消失的实无限量，又有些人将微分解释为不断减少直至消失等等。他们对这种新计算的基础知之甚少，也无法确定它的可靠性和严格性。[3]

微积分的形而上学问题在数学方面源于无理数的数学意义与无限趋近于零但不等于零的无穷小量的存在性问题及其几何直观解释的非本质定义；而在哲学方面则源于几何直观解释引发的算术化运动里波尔查诺、魏尔斯特拉斯、胡塞尔对康德的数学哲学中直观范式的变革，以及马堡学派对无穷小量的重新论证。

在数学方面，欧几里得将数定义为“多个单元”（ a multitude of units），胡塞尔在算术哲学中同样承接了希腊数的这种定义。该命题蕴含着整数由分离的、离散的单元所组成，而几何的线、面或体则是连续的量。因此，用算术的离散性处理几何的连

[1] 胡塞尔：《〈逻辑研究〉第二版"序言"草稿的两个残篇(1913 年 9 月)》，倪梁康译，《中国现象学与哲学评论》2014 年第 1 期，第 221-279 页。

[2] 从牛顿的《分析学》开始，在把微积分扩展到相关的无穷级数、常微分方程、偏微分方程和变分法等过程中，现代数学已经很难精确地确定分析领域及其范围。胡塞尔在从事哲学前的数学研究领域是变分学的一个子分支，其博士论文是《变分法理论文集》，可参看 Giorgio Scrimieri , *Analitica matematica e fenomenologica in Edmund Husserl*, Bari: Edizioni Levante, 1979.对其内容作了摘要和说明。

[3] Hua XII, S. 235.这里要提及弗雷格对微积分的基础问题也具有同样的论述，见弗雷格：《算术基础——对于数这个概念的一种逻辑数学的研究》王路译，商务印书馆，2006, 第 14 页。

续性，或者用整数之间的比值表述线段的可共度比（ratio）：单位正方形对角线长是 $\sqrt{2}$，因此就出现了无理（irrational）数悖论。因为线段不由整数构成，本质上是连续的，具有不可共度性，将整数的离散性等同于几何的连续性所以产生无理数的不可共度性问题。为解决该问题，希腊人放弃了无理数的算术意义，柏拉图的学生欧多克斯开启了算术问题的几何化进路的直观解释。17 世纪数学分析的基础即是建立在希腊数学的几何传统路径上，早期微积分的发展在欧陆和英美分别具有两条路径。首先是牛顿在处理物体运动的速度和加速度时，对无穷小量 dx 做了三种不同的解释：一种常量、一个趋于零的变量、两个正在消逝的量。[1]哲学家贝克莱从神学的观点出发， 对牛顿微积分基础上无穷小的三种矛盾解释进行了，认为是一种“消逝的鬼魂的量”，指出作为数学典范的微积分在其推理和结论之上并没有比宗教的假设和教义更具有严格性。[2]而莱布尼茨在处理空间面积的曲线、切线问题时引入了无限趋近于零但不等于零的无穷小 dx 和无穷大 $\frac{1}{dx}$ 的数学概念。但他认为对该数学概念的存在分析和形而上学假设上是不必要的。我们可以在代数中使用负数的平方根，也可以在微积分中使用无穷小量。莱布尼茨用数学实体的有效性来替代严格性的解释范式在当时的巴黎科学院引起了巨大争议，许多数学家认为无穷小的定义原则具有缺陷，可能导致错误[3]，因为牛顿基于物理运动的力学解释和莱布尼兹基于空间面积的几何学解释重新将芝诺所提出的空间与时间的连续性和离散性问题伴随着无穷小量的定义再次出现在微积分的基本概念和运算中，由此，谈论和解决“微积分的形而上学问题”成为十八世纪数学哲学的主要议题。[4] 1784 年欧拉和拉格朗年为了解决微积分的“真正形而上学”，在柏林科学院发起了一场 “提供一个确定的、清晰的，总之是一个真正的数学原理，能够代替无穷小”的学术奖励活动。胡塞尔在 1889/1890 冬季学期数学哲学问题的课程中重审了该活动，[5]并将微积分的形而上学问题作为其数学哲学研究的主要问题：

[1] 比如牛顿在求作为二阶流数的自由落体运动在 x_0 时刻的瞬时速度为：v=dy\dx=g.x0+1/2g.dx；如果 0，上式左端当 dy 成无穷小后，分母为 0，就没有意义了；如果不是 0，上式右端的 g.dx 就不能任意去掉。但牛顿在求瞬时速度时，已经假定了 dx≠0，但是在求取结果时又让 dx=0 而求得瞬时速度。而在《求积术》中求 x^n 的流数时,牛顿又试图避免用无限小。

[2] George Berkeley, *The Works of George Berkeley*, vol.4, Neison &Sons, London.1951, p. 53.

[3] 莱布尼茨、丰特内尔、伯努利兄弟都参与其中。罗尔（Rolle）拒绝接受无穷小量而纽文泰特（Nieuwentijt）则拒绝除了一阶无穷小量之外的高阶无穷小量，坚持认为错误的分析原则必然会产生错误的结果，将微积分当作“巧妙的谬论的汇集” 。Cf. Robinson, Abraham. The Metaphysics of the Calculus. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 47.1967, pp. 28-46.

[4] 卡尔·B·波耶：《微积分概念发展史》，唐生译，复旦大学出版社，2007，第 5 页。

[5] 胡塞尔记录了在提交的二十多篇论文中，年轻的瑞士数学家 L'Huillier（1750-1840）的论文获奖，他接受了达朗贝尔的极限理论，但依然没有完整解决该问题,见 Hua XXI, S. 234.

人们在以前过多地抱怨微积分神秘性。最杰出的哲学家和数学家共同合作形成的极大量的文献见证了他们想用知识之光澄清这些神秘的强烈愿望。这个介于哲学和数学之间的交叉领域被称为"微积分的形而上学"（或许要以达朗贝尔为例）。[1]

胡塞尔所引用的是达朗贝尔在《百科全书》用极限概念替代无穷小概念的转变。达朗贝尔总结了自牛顿和莱布尼茨以来关于微积分基础的哲学争论，认为无穷小量的争论是无意义的，"一个量或者是有或者是没有。如果是有，它就还没有消失；如果是没有，它就确实消失了。" 但他认为"这种微积分的形而上学，关于它已经写了很多，甚至比微积分本身的规则更加重要，也更加难以解决。" 达朗贝尔通过希腊几何学的穷竭法来构造圆作为多边形的极限，他发展出了无限地趋近于一个有限量的极限概念的几何直观解释替代无穷小量，并指出该概念的连续性中存在着微积分的"真正的形而上学"。而这种连续性问题正是由于极限的几何构造引发的，[2]需要波尔查诺、魏尔斯特拉斯进行算术化定义进行发展。

2.2.3 波尔查诺的非几何直观的极限定义及其对康德数学哲学的批判

波尔查诺从数学和哲学的层面对微积分的形而上学问题进行了初步解决。在数学层面，他作为一名数学家必须解决在数学理论基础上存在的无直观对象的无穷小量、虚数、无理数等数学概念的有效性的严格性问题。前者受到魏尔斯特拉斯和布伦塔诺的共同举荐和推崇：关于数和无穷集和的思想和《无穷悖论》波尔查诺进一步指出，莱布尼兹和牛顿对无穷小量的定义预设了几何学和物理学中的空间和时间直观条件，但在这些概念的直观进路解释中，主体性的时间性只能构造潜无限而无法理解实无限，因此引起了无穷小量的直观描述与形而上学—神学问题相关的潜无限的概念的存在争议。

波尔查诺的数学工作主要用极限的逻辑定义取代无穷小的几何学与运动学的描述，并且在康托尔之前捍卫独立于直观形式的无穷集合本身的存在。在哲学层面，波尔查诺主要批判康德的数学哲学中的直观理论。他认为康德将空间和时间的直观形式作为数学知识基本条件的认识论范式为微积分的形而上学问题提供了依据，并引起了十九

[1] Hua XII, S. 7.

[2] d'Alembert, Jean-Baptiste le Rond. "Differential." *The Encyclopedia of Diderot & d'Alembert Collaborative Translation Project*. Translated by Gregory Bringman. Ann Arbor: Michigan Publishing, University of Michigan Library, 2012.

世纪数学的心理化的解释。因此，按照波尔查诺的分析，对该问题的解决首先要找出康德的“纯粹直观”演绎中的问题所在，其次要证明无穷小量、极限、连续性可以具有不依赖于直观构造的数学路径的认识论。

1) 波尔查诺对康德数学哲学的批判

康德认为数学知识是一种直观与概念结合的先验综合知识的观点在19世纪初产生了极大影响。康德区分了分析判断与综合判断，而在数学中，大多数重要的判断属于先天综合判断，这类判断不能单纯通过分析概念得到，必须依赖直观：证明数学定理时，我们通过直观的方式（如在纸上画图）来观察和推导，从而得到超出概念本身范围的结论。波尔查诺是康德数学哲学最严厉的批评者之一，他质疑康德的直观理论在数学命题中的基础作用：

> 我仍然无法信服批判哲学的许多教义的真实性，尤其是康德关于纯粹直观和通过概念构造的说法的正确性。我仍然认为纯粹直观（即先天的）的概念内在矛盾。我更不能说服自己，数字的概念必须在时间中构建，因此算术在本质上是时间的直观。[1]

波尔查诺认为数学命题完全基于概念和定义，而不需要依赖于空间和时间的先天直观形式。他首先证明算术命题 $7+2=9$：

(1) 接受结合律：$\forall a,b,c\in N, a+(b+c)=(a+b)+c$ 和算术的基本定义（如 $1+1=2$）(2) $7+2=7+(1+1)=(7+1)+1$ （应用结合律）

(2) $(7+1)+1=8+1$ （再次应用算术规则和定义）

(3) $7+2=9$ （最终得出结论）。

这个证明过程显示了算术求和中项的数量比它们的顺序更为重要，与康德的观点相反，命题的真是基于数学原理和定义，而非时间直观形式。同时，对于几何命题，波尔查诺认为：

> 每条直线都可以无限延伸的命题背后没有直观：我们的想象所能描绘的线并不是无限长的。在立体几何中，我们经常关注如此复杂的空间对象，以至于即使是最生动的想象也无法清晰地想象它们；但我们仍然继续用我们的概念进行计算，

[1] Bolzano, Bernard. “Contributions to a Better-Grounded Presentation of Mathematics.” In *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, edited by Steve Russ. Oxford: Oxford University Press, 2004, p. 93.

并找到真理。[1]

我们基于空间直观，通过观察一条特定的直线，我们可以得出结论：每条直线都能够无限延伸。然而，这一普遍性的认识实际上来源于我们对单一直线形状的观察，并且基于所有直线具有相似性的假设。这意味着，一旦我们接受波尔查诺所提出的“所有直线相似”这一观点，这是证明过程的一个必要条件，因此，对直观的依赖也就不再成立。因为，如果这种相似性是通过观察具体实例得出的，那么我们需要检验无限多的实例，这显然是不切实际的。

因此，波尔查诺认为数学证明的数学对象不是由直观获得的，数学是一门概念性的科学，即使空间和时间是感知的纯粹形式，它们也无法取代纯粹概念的位置。算术不需要时间的纯粹直观就能成为普遍和必要的知识，几何也不需要空间的纯粹直观，数学中不应该包含任何类型的直观。

2) 波尔查诺—魏尔斯特拉斯对数学极限的非几何直观定义

在对康德的数学哲学进行反驳之后，波尔查诺阐明了自己非直观进路的数学概念论 （1）数学是概念性的科学（2）数学概念的定义不依赖对象的直观（3）无对象的表象产生数学概念（4）因此，数学不再是传统定义的数量理论（Grössenlehre），而是一门形式理论（Formenlehre）。这种观点深刻地影响了胡塞尔对数学作为形式科学的看法。 不同于将直观视为认识过程的核心，波尔查诺强调了无对象的表象的客观性和概念的分析性的重要性。他认为形成概念的表象本身是客观的，而非心灵或其功能，即便不存在对应的外在对象（无理数、无穷小、虚数），表象自身（作为主观现象的内容）也是独立存在的。这种客观性的强调，使得波尔查诺能够将概念描述为完全脱离直观的表象，进而，他将数学定义为一门纯粹概念分析的科学。在此框架之下，特别是数学的众多核心分支——包括集合论、数论、数量、函数以及时间与空间理论——均被纳入纯粹概念性科学的范畴。

胡塞尔认为微积分的形而上学的解决要从达朗贝尔开始，但是该问题的彻底解决在于波尔查诺和魏尔斯特拉斯。因为达朗贝尔判定无穷小量或者逐渐消失的量是没有意义的。他毫不含糊地宣称：“一个量或者是有，或者是没有。如果是有，它就还没有消失；如果是没有，它就确实消失了。假设存在介于这两者之间的中间状态，就只

[1] Russ, Steve, editor. *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*. Oxford University Press, 2004, p. 92.

能是一头由狮头羊身和蛇尾构成的吐火怪物。”尽管达朗贝尔指出了走出困境的方法但是他缺乏“极限”的明确定义。为了继续解决无穷小的问题，波尔查诺拒绝承认无穷小数和无穷大数的存在，并且给出了函数的连续性定义：若在区间内任意 x 处，只要 w 的绝对值充分小，就能使 f（x 十 w）一 f（x）差的绝对值任意小，那么就说 f （x）在该区间上连续。柯西也抓住了极限和连续性的概念，他指出无穷小量和无穷大量都不是固定的量而是变量，无穷小量是以零为极限的变量；把导数看作是差商的极限，把定积分看作是和的极限，认为极限概念是基于纯算术的考虑。“当一个变量逐次所取的值无限趋近一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小就多小。这个定值就叫作所有其他值的极限”。当说及函数的连续性时，就必须说明无穷小量的主要性质“当一个变量的数值这样地无限减小，使之收敛到极限，那么人们就说这个变量成为无穷小量。”柯西由此将该变量定义为无穷小量。这样，柯西就澄清了莱布尼茨的无穷小概念而且把无穷小量从形而上学的束缚中解放出来。 波尔查诺的数学和哲学工作大多一直湮没无闻，直到半个世纪过后才被赫尔曼—汉克尔与胡塞尔相继发现。胡塞尔本人在《逻辑研究》的补充卷中描述了他是如何接触到博尔查诺的思想：

> 我（作为魏尔斯特拉斯的学生）是通过施道尔茨（Stolz）发表在《数学年报》上的一篇论文并且首先是通过布伦塔诺（在其讲座中）对无穷悖论的辨析以及通过（康托尔才注意到作为数学家的波尔查诺。而后我并未停止对早已被遗忘的 1873 年《科学论》的通览，并且借助于其内容丰富的索引而不时地利用它。但我将他关于表象、命题、“自在真理”的原创思想误释为形而上学的艰涩。[1]

在波尔查诺的基础上，魏尔斯特拉斯改进了波尔查诺， 柯西等人的工作。他批评柯西等人采用的无穷小量 dx “一个变量无限地趋近于一个极限”等具有暗含着关于时间和空间的运动学含义。通过构造病态函数，魏尔斯特拉斯发现连续性并不蕴含可导性，进一步认为将分析奠基在几何直观上不具有可靠性，为了力求避免直观而把分析奠基在算术概念的基础上，魏尔斯特拉斯把一个变量简单地解释为一个字母，该字母代表它可以取值的集合中的任何一个数，这样经验直观的几何运动就此消除了，他用如今通用的ε-δ的极限定义取代了无穷小量 dx。由此，微积分的基本概念最终建立在算

[1] 胡塞尔：《〈逻辑研究〉第二版“序言”草稿的两个残篇(1913 年 9 月)》，倪梁康译，《中国现象学与哲学评论》2014 年第 1 期，第 221-279 页。胡塞尔晚年(1935 年 6 月 10 日)在与奥斯本夫妇的谈话中曾回忆起他如何在一家二手书店发现波尔查诺的著作(Husserl-Chronik, S. 463.)

术而非几何的基础上，分析的算术基础最终代替了希腊数学传统而始的经验直观的几何基础。其次在魏尔斯特拉斯之前，数学家们已经用数轴来标识有理数，负数。魏尔斯特拉斯在这里放弃了几何的直观化思路，而采用纯形式化的方式来构建实数系。他首先指出，严密化分析的基础关键在于实数系的精确结构和逻辑基础。极限、可导和收敛的问题都可以归结到实数系，建立连续函数的性质，必须有一个算术连续统的理论，只有建立无矛盾的数系基础才能完全解决数学危机。

严格分析的算术化运动使得人们认识到微积分形而上学争论的根源其实是实数系的基础问题。由魏尔斯特拉斯发起的严格分析的算术化运动最终以 1872 年康托（1845-1918）和戴德金（1831-1916）同时发表的实数系统的基础而告终。随后，皮亚诺定义了自然数的五条公理，得出了自然数的所有性质。然后从自然数及其性质出发，可以直接定义负自然数与有理数，并建立其性质。所以，一旦对于自然数的逻辑处理完成之后，建立实数系的基础问题就完备了。在实数理论的基础上，又可以建立起极限论的基本定理，从而使数学分析也终于建立在实数理论的严格基础之上，因此数系成为严格分析的算术化运动的坚定基石。微积分发展的历史顺序实质上恰好与合理建立微积分逻辑顺序相反。但是上述步骤中，建立有理数系的关键问题，在于采取一些步骤来构造自然数的基础并确立其性质。因此，通过严格分析的算术化运动，微积分的形而上学问题转化为了对于数的概念的起源和一般算术的构建，由此构成了现象学的开端：

> 在关于构建一般算术的发展起点和核心方面，我们与这个时代最重要和最进步的数学家们意见一致：首先是与魏尔斯特拉斯，但也同样与戴德金、乔治·康托尔以及其他许多人意见一致。事实上，我们甚至觉得自己与克罗内克那样的研究者处于不冲突的关联之中，他们认为基数概念仅仅是序数概念的衍生物。[1]

2.2.4 魏尔斯特拉斯与胡塞尔对数概念的分析：计数活动与集合联结

在《逻辑研究》第二版的新序言草案中，胡塞尔向他的读者透露："我所有研究的来源和我认识论困难的第一个来源是我关于算术哲学和一般数学的第一部作品。"[2]而胡塞尔的《算术哲学》的目的即贯彻魏尔斯特拉斯彻底的分析的算术化的事业。微

[1] Hua XXI, S.235.
[2] 胡塞尔：《〈逻辑研究〉第二版"序言"草稿的两个残篇(1913 年 9 月)》，倪梁康译，《中国现象学与哲学评论》2014 年第 1 期，第 221-279 页。

积分的形而上学问题通过分析的算术化运动最终归结在于数概念的起源解释。胡塞尔在《算术哲学》的导言中重新回顾了这一传统：

> 一方面是对算术基本概念的分析，另一方面是对体现算术特点的符号方法的分析，另一方面分析作为算术特征的符号化方法，承诺为心理学或逻辑学提供一些成果。进行了比 “微积分的形而上学 ”所要求的更详细的研究。[1]

分析算术化实质是将分析建立在整数的基础上关于如何构造整数的基础及性质的研究，即算术基础问题。通过对数的概念的起源和内容进行分析，从而为数学哲学奠定基础。

1) 胡塞尔的魏尔斯特拉斯之路：数的概念与直观的起源

胡塞尔承继了魏尔斯特拉斯将分析视为关于自然数（Anzahl）[2]及其关系的观点，认为对自然数概念的研究可以为高等数学中与分析相关的复杂概念及其符号本质奠定基础。

> 事实上，许多人——其中有像魏尔斯特拉斯这样高度重要的数学家甚至确信，是自然数构成了算术的真实和唯一的基本概念。当然，其他研究者则持不同观点。对于那些将自然数视为序数的具体应用的人而言，后者通常是基本的算术概念。
>
> 魏尔斯特通常在他划时代的关于分析函数理论的演讲中，以这样的句子开始。“纯粹算术（或纯粹分析）是一门完全且仅以数的概念[Zahl]为基础的科学。它不需要任何其他预设，也没有任何假设或前提”。(1878 年夏季学期和 1880/81 年冬季学期的内容几乎相同）。接着是对自然数意义上的数概念的分析。[3]

胡塞尔这时候的工作依然归属于魏尔斯特拉斯分析的算术化的传统，认为高等分析完全不借助于几何学，只从初等算术当中产生，而初等算术又奠基于数的概念。总之，一切数学哲学都必须从数的概念分析开始，将自然数域作为所有数域的唯一基础。胡塞尔需要解决：

（1）数是什么？

[1] Hua XII, S. XXII.

[2] Anzahl 在胡塞尔的语境中应该翻译为“个数”。但为了便于理解和讨论方便，在本文中将 Anzahl 直接翻译为“整数”整数，无特殊说明即是指正整数。

[3] Hua XII, S. 13.(后一节引文作为脚注出现。)

（2）数是在表象中如何给予我们的？

（3）数概念的直观与符号的表象问题之间的关系问题如何解决？[1]

因此，在对自然数概念起源的分析中，胡塞尔同时也继承了布伦塔诺对本真表象和非本真表象的划分。本真表象是物自身的直接呈现和原本内容的当下给予；而非本真表象是物自身仅借助描述其性质的符号标记间接地给予我们一个符号表象。比如：我们直接看到一所房子，我们就获得关于这所房子本真表象；然而，当我们向某人描述这所房子的位置和形状时，某人就获得了一种符号表象。在对表象划分的基础上，胡塞尔将数系表征为本真的数和以符号作为中介的非本真数。本真数的概念通过本真表象来获得，非本真数的通过非本真表象来获得，并且进一步，数的符号运算也是据此进行。前者需要通过描述心理学来澄清其概念的起源，而后者成为逻辑学所讨论的对象。正因为如此，本真数的描述心理学构成研究也成为对数的符号—逻辑的研究基础。但是胡塞尔如何从本真数过渡到非本真数？又如何实现非本真数的构造？在这两个步骤上，胡塞尔面临着困难。

2) 计数活动与集合行为

魏尔斯特拉斯认为对数概念的分析起源要追溯到心灵的计数的行为。这个观点同样构成胡塞尔算术哲学研究的出发点。胡塞尔在魏尔斯特拉斯在他关于分析函数理论的讲座（SS 1878 和 WS 1880/81）基础上，在讨论计数操作的意义上对数的概念进行了分析：

> 我们最好通过计数的操作来获得数字的概念。考虑一个给定的多个对象的总数；在这些对象中，我们通过有序地考察和把握，寻找那些在表象中被把握的某种固定特征。我们把具有该特征的单个对象在一个包含性的表象中统握为一体，这样就形成了多的一，这就是数。[2]

可以看出，魏尔斯特拉斯对于数概念的分析本身就隐含着心理学， 胡塞尔赞同我们计数活动而获得数的概念，但什么是计数？胡塞尔对计数活动的分析要比魏尔斯特拉斯更为精细和深入。数作为一种纯形式的概念，它和“红”的这种质料性概念不同，它是如何呈现自身，我们又如何把握到它？胡塞尔将数规定为多，认为数是多的一般

[1] Hua XII 的第一部分“关于数的概念：心理学的分析”，以及 Hua XII, S.305-356 则主要要致力于问题 1 和 2；Hua XII 的第二部分 “关于数的概念：逻辑学的分析”以及 S.359-504 则主要致力于问题 3。

[2] Hua XXIV , S. 5;12.

概念可分辨的种。他说“当你指出一个数，一个多也就被谈及；同时，有一个多，也就存在一个确定的数。”因此，对数的概念的把握要从多的概念开始，而多的概念又被认为是抽象的表象，抽象表象的基础则是具体现象，所以数的表象也就奠基于多的现象。这些具体的多的现象构成一个集合，胡塞尔称这种“确定的全体或多”为集合表象。

而使集合表象成立的可能性条件是什么呢？胡塞尔认为集合表象的特征在于其元素的完全任意性：一本书、一杯咖啡、一个人或者一只猫、一棵树、一轮夕阳，但这些不同类型的内容和现象的多之间存在一种使得元素联结成集合的共有结构，胡塞尔称之为“集合联结”，它显露着 3 这个数的形式特性。而集合联结的产生则需要具备两个条件：因为作为个体的内容和元素只有作为一个整体的呈现，我们才能把握到多的概念，因此，它需要一种能够抽象集合表象的注意力能力；二是多作为一个整体呈现在意识中之后，它自身又能作为一个对象为心理的反思行为所把握。

在集合联结中，胡塞尔认为存在一个一阶活动为一个二阶活动奠基的结构。首先作为一阶心理活动包含有待联结的内容，其中也包括物理关系；接着，作为反思的二阶活动会完全地包含一阶活动及其内容，借反思再次指向一阶活动，并扩展其原初的心理活动内容。并且胡塞尔在这里着重强调了集合联结是高阶活动一种心理关系而不是初阶活动中的物理关系。他从作为内容元素的关系项和构成作为复合现象的关系两个方面进行了区分：“物理关系和心理关系的差异在于，物理关系作为初等关系，它是表象的对象，对象与它的语词处于同一个层面，而心理关系却并非如此。而在初等关系中，关系以及关系所联结的语词都是同一表象内容的组成部分；而在心理关系中，只有通过对形成关系的活动进行反思，关系自身才可以成为表象的对象。”[1]

这里关键要指出的是，胡塞尔在对数概念的集合行为的分析中已经将发生心理学中的时间因素完全排除干净。胡塞尔进一步指明，集合联结虽然不是一种物理关系，但也并非等同于一种意识的统一形式或者时间的同时性和相继性。就意识统一形式而言，因为集合联结具有一种自发性，其本质不是拥有所有的意识内容，而是在于能够自发地关注到任何内容，因此二者并不相同；其次集合联结也并非等同于时间的同时性。音乐的表象是相继的，而并非同时的；并且集合联结也不在于时间的相继性。因为时间相继的表象内容最终还需要一个整体的综合行为。因此，不论是时间的相继性

[1] Hua XII, S.15.

还是同时性，仅是数和多数的心理学发生前提，而与其内涵意义无关。

在日常语言习惯中，我们实际上已经在用连接词表达集合联结，因此胡塞尔就用“……和……”的结构作为集合联结的语义表达式。集合联结的语义表达“和”与“一”作为两个形式结构单元共同构成数的概念内涵：一和一……，其中“……”代表不确定性。随着不确定性的连断给定，多的概念就会分解为不同的多的数：2、3、4。本真数由此构造和呈现出来，胡塞尔认为，本真的数不会超过 3 个，后来又将本真数扩展为了 12 个。由于集合联结和某物都是形式概念，都是通过心理反思的抽象而获得，因此，胡塞尔认为，数的概念最终产生于反思行为中。

2.2.5 胡塞尔对非本真数的构造与布伦塔诺表象模式的失败

随着数系的扩展，由符号标记的非本真数（虚构数）[1]成为算术的主要部分，而本真的直观的数则成为算术的极少部分。因此，胡塞尔认为，算术发展的实质就是为了摆脱心灵的限制而要扩展非本真数。

从本真数到非本真数的扩展中，非本真数的概念以符号的方式被给予，其实质是通过多的计数而形成的本真数通过符号运算扩展生成。非本真数的符号表象对胡塞尔的数系扩展非常关键。对于符号表象，“正如其名称所指出的，符号的或非本真的表象是通过符号获得的表象。如果一个内容不是如其所是地直接被给予我们，而仅仅是间接地通过无歧义地刻画它的符号，那么我们拥有该内容的符号表象，而不是本真表象。”[2]真实事物通过记号而间接出现，而符号表象则成为其存在的替代物，它以一种非本真的方式表现其内容的指向性。胡塞尔认为，在集合联结中，这种非本真表象具有一个关键特征：它包含有真实的已被联结起来的内容之外，同时凭借这种内容，包含着虚数所在的更多东西。

为此，胡塞尔在本真数的概念系统中规定了附加和划分两种运算方式。通过附加新的元素形成新的集合联结和关系其中，附加的这种运算方式代表着加法和乘法。乘法是加法的一种新的标记和缩写方式，通过划分元素实现集合联结的重新组合和新关系的生成，而划分的这种运算方式代表着减法和除法。除法是减法的一种新的标记和缩写方式。但是从本质数演进到非本质的符号数，集合联结无法实现对非本真数的表象，因为不管是运用本真数概念系统中的附加和划分两种运算，都无法获得像负数、

[1] 胡塞尔的虚数概念即虚构的数，也称作大数，包括无理数、虚数、复数、四元数等。
[2] Hua XII, S. 257.

无理数、虚数的表象，集合联结因此无法解决这个问题。同时，算法的有效性却依然适合于非本真数，因此非本真数的算法有效性的根据也成为困扰胡塞尔的问题。

2.3 胡塞尔对魏尔斯特拉斯的突破：一般算术概念的提出

胡塞尔在《算术哲学》第一卷的前半部分讨论通过直观行为给予的本真数，[1]而在第二部分则根据符号表象扩展非本真数域，并根据运算定义自然数，研究如何将概念系统转换为符号系统，以及通过符号运算如何将符号系统转换到概念系统。而在《算术哲学》的最后阶段，胡塞尔已经远离了数的表象行为而侧重于形式化算法，他将重点放在符号规则上：胡塞尔认为算术中算法是优先于自然数及其构造理论的， 算术实际上是形式逻辑的一部分。符号数和算法的有效性促使胡塞尔放弃了在《算术哲学：心理学和逻辑学研究》第一卷，更确切地说是 1887 年时候的教职论文《论数的概念：心理学研究》[2]中对数起源的描述心理学解释。胡塞尔现在放弃了魏尔斯特拉斯将分析作为一门数的科学的观点，在算术哲学的后期，他认为，算术发展的实质就是为了摆脱心灵的限制而要扩展非本真数，我们的任务在于“通过存在于数之间的已知关系，从被给予的数出发获得其他的数。”[3]而从给予的数出发扩展未被给予的数，有两种可设想的方法：

> 一种方法是概念运作，在这种情况下，命名或符号只起到一个从属的作用，它在本质上是一种感官可感的操作。而另一种方法是根据固定的规则，利用数的符号系统从符号得到符号，只把最终的结果化归为由某个概念所指称符号的方法，这才是算术的逻辑方法。[4]

第一种运算方法就是根据那些直观能被给予的数所进行的计算；而第二种运算则针对那些较大一些的数，它们虽然不能被直观但却能被设想为那些能被直观的数的集合，比如对于 $a=4^3$, 我们可以把它化归为直观数的集合而实现把握：

(1)$4^3=4*4*4=(4+4+4+4)+(4+4+4+4)+(4+4+4+4)+(4+4+4+4)$

[1] 在《算术哲学》的前言中，胡塞尔预告了第二卷会解决负数、有理数、无理数等虚构数的问题。但是他在思想上的成熟和迟疑消解了这本书的完成。相关残存的手稿收录在 Hua XII, S. 340-429 页的五篇附录和 Hua21 的算术研究部分。

[2] 胡塞尔在其教职论文结尾处提出了六个论题。其中一个论题:无理数和虚数在所有数学领域的应用的逻辑合理性尚未被证明是对无理数提供逻辑辩护；另一个论题是:在真正意义上，一个人几乎不能数超过 12 个数。参见 Hua XII, S. 256.

[3] Hua XII, S. 256.

[4] Hua XII, S. 257.

(2)4=1+1+1+1

为了使第二种运算更加系统化和简单化，在此基础上必须扩展数系和定义符号系统，在符号系统的支持下，运算可以仅仅借助符号得以进行而无需数的概念化，针对这些数的符号的运算也就构成了第三种运算，形成了一般的算术观念。因此，自然数的关系及其算法取代了自然数的概念成为算术的基础。胡塞尔在这里讨论了直接运算和逆运算之间的区别。直接运算（如加法 a+b，乘法 a•b，乘积 a•b）是无限制的，可以在任何条件下应用，并且总能产生一个新的结果数字。例如，给定任意两个数字 a 和 b，我们总能得到 a+b 或 a•b 的一个确定的结果。这些运算形式是开放的，不依赖于特别的限制条件。

相比简单的加减乘除运算，更高级运算的逆运算会突破数的概念的意义限制。逆运算（如减法 a-b、除法 a/b、开方 $\sqrt[b]{a}$ 、对数运算 $\log_a b$）则具有更严格的条件。它们只能在特定的条件下应用，并且不总是能产生有效的结果。例如，a-b 总能得到一个结果，但 a/b 仅在 b≠0 时有效；同样，对数运算 $\sqrt[b]{a}$ 只有在 a >0 时才有意义。胡塞尔认为，逆运算的这种受限性必须通过一个命题来规定，或者更确切地说，必须通过存在法则来界定。这意味着，逆运算的有效性不是自然显现的，而是需要通过某些形式化的规则或公理来明确。例如，在除法中，除数 b 不为零是一个公理性约定，而对数运算要求 a>0 是另一个公理。这些法则是对逆运算条件的规范和限定。胡塞尔指出，这些法则可能是从某些基本公理中推导出来的。基本公理为运算提供了基础和前提，从而确保了数学体系的一致性和有效性。换句话说，胡塞尔认为，逆运算的有效性不仅仅是一个经验性问题，而是与数学的公理结构紧密相关的，并在形式化公理系统与数概念的定义的关系中开始构建流形论。

2.4 胡塞尔与哥廷根数学学派：从公理化到流形论

2.4.1 哥廷根的数学与哲学：希尔伯特与胡塞尔的友谊

胡塞尔在 1901 年 10 月接受教育部的任命前往正在成为世界数学中心的哥廷根大学。哲学系和数学系对胡塞尔到来持有相反的态度。[1]哲学系的心理学教授穆勒（G.

[1] 当时的哥廷根大学由传统的四个学院组成：神学、法学、医学和哲学。其中，数学系和哲学系在 1837 年同属于哲学学院。1922 年在理查德·柯朗（Richard Courant）的建议下，数学系脱离哲学系而成为一个新的数学中心，但在二战之后这里已经不再是世界数学中心了。

Müller）和历史哲学教授鲍曼（J. Baumann）反对教育部对《逻辑研究》作者的任命，而数学系的克莱因和希尔伯特则对《算术哲学》作者的到来表示热烈欢迎。克莱因提议胡塞尔作为哥廷根的代表参与莱布尼兹通信集的整理出版工作，[1]而希尔伯特邀请胡塞尔加入哥廷根数学学会关于公理系统的扩张和完备性的报告研究。[2]刚刚完成《逻辑研究》（1990）的哲学家与刚刚完成《几何基础》（1889）的数学家开始了短暂而紧密的合作。希尔伯特在 1900 年 8 月 8 日于巴黎举行的第二届国际数学家大会上提出了 23 个未解决的数学问题，他将证明算术公理系统的一致性和完备性的任务列为第二个问题，[3]并在 1901/1902 冬季学期 11 月 5 日的哥廷根数学学会的第四次会议上发表了题为《算术一致性问题的"公理系统的闭包"》的演讲，其中谈到了完备性和可判定性的问题。根据克莱因的会议记录，胡塞尔从第三次会议开始就参与了该学会的报告和讨论。[4]在随后的第 5 次会议（11 月 26 日）和第 7 次会议（12 月 10 日）上，克莱因和希尔伯特邀请胡塞尔作了关于《通过虚数的转换和公理系统的完备性》（Der Durchgang durch das Unmögliche und die Vollständigkeit eines Axiomensystems）的两次流形论讲座。在 1901 年的哥廷根大学的哲学学院，数学系和哲学系同时出现了两种关于算术公理系统的完备性的解释理论。胡塞尔的夫人玛尔维娜（Malvine）记录了这一段哲学与数学结合的哥廷根岁月：

> 但是在这里（在哥廷根），大学的精神生活与哈勒大学有着完全不同的特质，特别是数学家克莱因与希尔伯特，他们将胡塞尔带入自己的圈子并且鼓励着他，还有他最近在数学学会进行了关于源自旧有的数学哲学手稿的讲座，同时现在致力于将其出版。[5]

希尔伯特与胡塞尔的学术友谊与交流正是哥廷根精神的显现。[6]希尔伯特一直关注

[1] 在 1901 年 4 月于巴黎举行的首次世界数学大会上，新成立的国际学术院协会决定出版莱布尼茨的作品；负责准备出版工作的是道德与政治科学院、科学院（均位于巴黎）以及普鲁士科学院（柏林）。

[2] 希尔伯特当时正在讲授变分学（这是胡塞尔博士论文的主题），变分问题是希尔伯特于 1900 年 8 月在巴黎提出的二十三个问题中的最后一个问题。正是希尔伯特所建立的一种新的、更简单的变分方法使得胡塞尔博士论文中对二阶变分的讨论成为历史。Cf.Husserl E.,Contributions à la théorie du calcul des variations,Edited by J. Vauthier (Kingston: Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, no. 65, 1983).

[3] David Hilbert, "Mathematische Probleme", Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 3 (1900): 253-297.

[4] 其中第三次会议由卡尔·施瓦茨希尔德（Karl Schwarzschild）发言，克莱因约定胡塞尔在此次会议中商谈关于莱布尼兹通信集出版的相关事宜。Brief.VII, S. 151.

[5] Brief. IV, S. 22.

[6] 胡塞尔与希尔伯特以及他们的家庭成员保持着终身的友谊与长久的书信交往。Cf. Husserl Archive,Mitteilungsblatt no. 34 (Leuven:2011).https://hiw.kuleuven.be/hua/Media/mitteilungsblatt/mitteilungsblatt-36-2013.pdf. Accessed December 19, 2013.

数学基础问题，致力于发展一种数学批判的系统哲学。他认为系统哲学应该由作为数学家出身的胡塞尔代表，当 1905 年哲学系教授穆勒和鲍曼再次阻拦教育部关于胡塞尔的正教授任命时，希尔伯特自发征询了七份关于胡塞尔科学成就的推荐信，并亲自写信给教育部部长帮助胡塞尔获得了正教授职位：

> 哲学研究领域有三个独立的学科，即系统哲学、历史哲学和实验心理学，每个学科都因其范围和实践的差异而成为独立的学科。然而，纯粹理论的系统哲学恰恰使这两个学科得以成为可能，它有其作为中心地位的合法性，并且对于科学和教学（事实上对于我们文化的整体发展）而言，不承认这一要求或将其置于次要地位都将带来灾难性的后果[]我们学校的系统哲学由我们的同事胡塞尔先生代表[]让我们的同事胡塞尔先生永久留在我们的学校是符合我们哲学系和大学的整体利益的，也是一项紧要的任务。[1]

希尔伯特的目的是将哥廷根大学建设成为数学和哲学的研究中心，而计划的关键是将胡塞尔永久地留在哥廷根。他在 1908 年依然在为胡塞尔获得一个额外的哲学教席而努力，但这一尝试始终未能成功。当胡塞尔在 1916 年离开哥廷根前往弗莱堡时，希尔伯特认为自己最坏的预想被证实，他在给教育部部长秘书的信函中写道：

> 在我看来，数学、物理学和哲学构成了一个相互关联的科学体系，而我一直将发展数学与哲学之间的关系视为我一生工作的一部分。我对失去胡塞尔的担忧已经不幸地变成了现实，目前我唯一关心的是防止“胡塞尔案件”再次重演。[2]

> 15 年来，我一直为哲学而战[…]我承诺了如此之多：哥廷根将成为哲学的第一中心。这要么不发生，要么就在哥廷根发生，以至于没有人会像胡塞尔那样前往弗莱堡，或像迈尔那样去海德堡。一流的文化问题正处于危险之中。[3]

[1] 希尔伯特 1908 年为胡塞尔谋求教授职位而写的关于胡塞尔的“独立意见”未发表手稿，收藏于哥廷根大学图书馆手稿部。Cf.J. Da Silva and C. Hill, The Road Not Taken: *On Husserl's Philosophy of Logic and Mathematics* (College Publications, 2013), p. 385.

[2] 这封书信是希尔伯特于 1918 年 7 月 30 日写给柏林文化部副秘书贝克博士的（Cf.J. Da Silva and C. Hill, *The Road Not Taken: On Husserl's Philosophy of Logic and Mathematics*, pp. 391-392）。这里要提及的是，胡塞尔此前是作为非国家预算编制内的副教授被教育部任命的，这是一个专为个人设置的教席，并非一个永久性的职位。

[3] 这里的内容选自希尔伯特 1918 年夏天写给教育部部长的书信（Cf.J. Da Silva and C. Hill, The Road Not Taken: On Husserl's Philosophy of Logic and Mathematics, p. 394）。

2.4.2 胡塞尔在哥廷根数学学会上关于流形论的双重讲座背景

胡塞尔的流形论讲座手稿保存在鲁汶大学档案馆编号为 Ms.KI26 的文件中，原讲稿已经丢失。[1]现存两个版本，第一个版本存在于胡塞尔《算术哲学：心理学与逻辑学研究》的附录中，第二个是 Karl Schuhmann 夫妇于 2001 年重新修订补充发表的版本，[2]其中包括了胡塞尔对希尔伯特算术公理化的分析和批评。该版本主要基于新发现的《德国数学家学会年鉴》中的讲座摘要[3]和整个 KI26 手稿的重新转录，并且补录修改了第一个版本中许多与原文不符合的错误。希尔伯特在讲座之后督促胡塞尔在《德国数学家学会年鉴》上发表流形论演讲，但胡塞尔迟迟未完成这项工作。在后期的著作中，胡塞尔反复提及流形论演讲的重要性，[4]并认为他关于流形论的限定性概念与希尔伯特的完备性概念之间存在密切关系，二者在研究目的上"本质上是朝着同一方向的"。[5]

在流形论的双重讲座中，胡塞尔在第一次讲座提出了关于解释虚数存在性问题的五种方案，在第二次讲座中提出了针对该问题的相对限定性和绝对限定性的两种流形论解释方案。与 Centrone、Hartimo 等学者将双重讲座的第一个版本作为流形论分析的文本依据不同，[6]本文的分析将主要建立在第二个版本，尤其是第二次讲座的内容以及胡塞尔后期文本中《纯粹现象学和现象学哲学的观念》第 1 卷的第 72 节以及《形式逻辑与超越论逻辑》第 3 章的第 31 节的流形论讨论。

胡塞尔对流形（Mannigfaltigkeit）概念的使用和流形理论（Mannigfaltigkeitlehre）的定义因为在作品中的多义性和流变而被赋予了诸多不一致的解释：

> 当我在前面谈到产生于几何理论的普遍化之中的流形论时，我指的是关于 n

[1] 根据 Karl Schuhmann 夫妇的转录和整理，编号为 Ms.KI26 的手稿材料包括：a）1900 年的旧手稿,可能是胡塞尔夫人提到的"古老的数学-哲学手稿"。但这些旧手稿只能作为背景材料，不是 1901 年演讲手稿的直接组成部分。b）1901 年年底的笔记手稿（KI26/3-14）。c）三组与演讲同一时期的铅笔手稿（KI26/33-36，75-85，87-97）。d）1901/1902 年圣诞假期的墨水手稿（KI26/37，43-69），是胡塞尔当时为了出版而作的定稿修改。在上述材料中，有 9 张铅笔手稿（KI26/35，83，84，96 等）最有可能是属于原始的演讲手稿，其中 5 张与第一场演讲相关，4 张与第二场演讲相关。其余 17 张铅笔手稿的性质不太明确，可能是事后的补充笔记，也可能是准备性的思考材料。其中 KI26/100 手稿是关于莫里茨·帕施（Moritz Pasch）的"可判定性的要求"《德国数学家学会年鉴》第 27 卷（1918）。

[2] 流形论的第一个版本可参见 Hua XII, S. 430-444;452-457。第二个增补扩充的版本可参见 Schuhmann E. and K. Schuhmann,"Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901", *Husserl Studies* 17, no. 1 (2001): 87–123。

[3] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 11 (1902),p.72,147.

[4] 胡塞尔的流形理论首次在他的哥廷根数学讲座中正式提出。以后在其多部作品进行了讨论：《逻辑研究》第 1 卷的第 69—70 节；《纯粹现象学和现象学哲学的观念》第 1 卷的第 72 节；《形式逻辑与超越论逻辑》第 3 章第 31 节、第 51—54 节、第 85 节；《逻辑与一般科学理论》第 2 章；《逻辑学与认识论导论》第 18—19 节；《欧洲科学的危机与超越论的现象学》第 9f 节。

[5] Hua III/1, S.153;Hua XVII, S.101.

[6] Stefania Centrone, "Husserls Doppelvortrag in der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen 1901", in *Edmund Husserl 1859-2009: Beiträge aus Anlass der 150. Wiederkehr des Geburtstages des Philosophe*n, ed. Konrad Cramer and Christian Beyer (Berlin and Boston: De Gruyter, 2011), pp.103-124.

> 维流形的学说，无论它是欧几里得的流形，还是非欧几何流形。此外还指格拉斯曼（Grassmann）的扩张论和哈密顿（Hamilton）的理论，后者与前者相近，首先在几何学上可以替代前者。在这些流形论中也包括李群（Lie group）理论，康托尔（Cantor）对数和集合的研究[...]只要一位哲学家对黎曼-亥姆霍兹（Riemann - Helmholtz）理论有初步了解，他就可以大致地想象不同类型的纯粹理论形式是如何通过规律性的纽带联结在一起的。[1]

目前学界关于流形论的研究主要存在两种解释。第一种解释是以 Roger Schmit 、Ortiz Hill 为代表的算术集合论及其形式化的流形论解释。[2]这种解释以胡塞尔在哈勒时期与康托尔的思想关系以及集合一流形之间的“一”和“多”关系为出发点。国内学界对这一路径尚未进行重视和系统阐述，奚颖瑞补充了胡塞尔流形理论中格拉斯曼和汉克尔关于形式化的两个关键思想动因，但他将流形论立场基本上等同于希尔伯特的形式主义，[3]高松进一步强调了流形论的形式化内涵与游戏数学的本质区别。[4]第二种是以 Ierna、Bachelard、Morales 等为代表的几何拓扑学及其意向流形解释。这种解释以流形概念的数学史起源分析和胡塞尔对黎曼—亥姆霍兹的空间曲率流形的解读为基础。[5]国内学者钱立卿、马迎辉、单斌等也持有这种解释立场。[6]钱立卿梳理了高斯-黎曼-克莱因的几何流形概念的发生及其效果历史，也提及了相关的算术化路径，但这种流形概念的数学史统合没有对现象学的流形理论进行进一步考察。[7]马迎辉提出了意识活动中意向流形概念的建构作用，尤其是通过一维流形构造二维连续统。但是意向流形概念的诸种建构使用并不等同于胡塞尔本人对流形理论本身的研究。

但是需要注意的是，在保有流形概念的基本数学内涵的前提下，过度复杂化的流形概念的数学解读会掩盖此概念正常清晰的现象学哲学含义表达，同时将流形概念的使

[1] 埃德蒙德·胡塞尔：《逻辑研究》第 1 卷，倪梁康译，商务印书馆，2017，第 249 页。译文有改动。

[2] Roger Schmit, *Husserls Philosophie der Mathematik: Platonische und konstructivische Momente in Husserls Mathematikbegriff* (Bonn: Bouvier Verlag Herbert Grundlagen, 1981), chap. 2, chap. 4; Hill Claire Ortiz,“Did Georg Cantor Influence Edmund Husserl?”, *dacuozi* 113, no. 1 (1997): 145-170.

[3] 奚颖瑞：《“形式”与数学基础问题——基于胡塞尔哥廷根数学学会报告的考察》，《安徽大学学报（哲学社会科学版）》2023 年第 2 期。

[4] 高松：《形式化作为现代科学发现的秘密——以虚构数问题为线索》，《哲学分析》2021 年第 2 期。

[5] 胡塞尔在全集 21 卷《算术与几何学研究》第二部分对黎曼与亥姆霍兹的几何流形理论进行了详细的阐释，这也是构成流形论几何解释的文本基础。相关的解释可参见 Luis Alberto Canela Morales,“From Grassmann, Riemann to Husserl: A Brief History of the Concept of Manifold”,META. Research in Hermeneutics, *Phenomenology and Practical Philosophy* 9, no. 2 (2019): 473-500。

[6] 马迎辉：《意向性：从立义到意向流形》，《安徽大学学报（哲学社会科学版）》2015 年第 6 期；单斌：《胡塞尔的流形概念——以空间流形为中心的考察》，《安徽大学学报（哲学社会科学版）》2014 年第 5 期。

[7] 钱立卿：《胡塞尔“流形论”观念是如何形成的？——一个数学思想史角度的综观》，《中国现象学与哲学评论》2020 年第 1 期。

用混淆为对流形理论本身的解释。本章将以虚数的数学认识论问题为线索，不再考察流形概念的数学发生史，但会补充高斯的复数解释对流形理论的影响。主要以胡塞尔应克莱因与希尔伯特的邀请在哥廷根数学学会上首次系统阐释流形论的两篇讲座为基础，分析流形理论的问题来源和内容结构，在流形论的算术集合解释和几何拓扑学解释的前提下，发展一种流形论的公理化与语义学解释，并给出希尔伯特关于公理系统完备性的句法解释与胡塞尔关于流形论完备性的意向性及语义模型论解释。

2.5 数的存在性问题的四种解释方案与形式法则的恒定性原则

虚数难题是胡塞尔早期数学哲学的中心问题。胡塞尔在哥廷根数学学会的报告中指出，在数学家和哲学家共同感兴趣的困难领域存在一个基本问题：数学的形式化产生了不存在实在对象的虚数概念的认识论问题。他以自然数的闭合性中代数化的逆运算运用为例说明虚数的产生：

1）如果 a>b，那么存在 a+b 是一个自然数，且 a-b 也是一个自然数。

2）如果 b>a，那么存在 a+b 是一个自然数，而 a-b 则产生一个无法在自然数系中进行定义的数，也就是虚数。

胡塞尔的虚数概念在广义上包括负数、虚数、分数和无理数，而在狭义上仅指虚数。[1]胡塞尔认为在数系扩张的历史中无理数和虚数的存在性问题引起了数学认识论的主要困难。[2]卡尔达诺（Cardano）在用不同算法求解三次方程时发现了负数的平方根：$i^2=-1$，将其称之为“既微妙又无用”。[3]虚数的存在性引起了数学家的争议，当时人们无法根据实在对象理解虚数的存在。笛卡尔在他的《几何学》中首先命名了虚数：“虚构的数”（imaginaire）与“实在的数”相对应，[4]欧拉正式用符号 i 来表示-1 的平方根作为虚数的单位，他认为虚数无法被解释为任何大于、小于或等于零的实数，其本质是不可能的，是数学家可通过想象而定义的数。[5]高斯在其论文《关于双二次剩余报告（Ⅱ）》中对复数的存在性给予了几何直观解释。他将复数定义为 a+bi 的形式，其中 a 和 b 是实数，i 是虚数单位，满足 $i^2=-1$，从而将复数看作平面上的点，实部和虚部分

[1] Schuhmann E. and K. Schuhmann，“Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901” *Husserl Studies* 17, no. 1 (2001): 92.

[2] “无理数和虚数在所有数学领域的应用的逻辑合理性尚未被证明”以及“在真正意义上，一个人几乎不能数超过 13 的个数”是胡塞尔在 1887 年教职资格论文的答辩论题，Cf. Hua XII, S. 339.

[3] Windred G.,“History of the Theory of Imaginary and Complex Quantities” ,*The Mathematical Gazett*e14, no. 203 (1929): 533-541.

[4] René Descartes, *Discours de la méthode* (Leiden, Netherlands: Jan Maire, 1637), *appended: La Géométrie*, book 3, p.380.

[5] Leonhard Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, 2 vols. (Kaiserliche Akademie der Wissenschaften, 1771),p.43.

别对应横坐标和纵坐标。[1]但是高斯认为无论是把负数当作直线上一个定向的距离还是将复数解释为平面上各点之间的关系，这种几何解释并没有描述它们的固有性质。汉克尔最后将复数 $z = a + bi$ 视为二维实平面 R^2 中的点（a，b)，从而建立了复平面的概念，系统化了复数的运算规则。复数加法可以被理解为平面向量的加法，而复数乘法对应于向量的旋转和伸缩。这一表示法不仅直观，而且为复数运算提供了几何解释。

胡塞尔认为高斯在《关于双二次剩余报告（Ⅱ）》中对虚数存在的解释性方案和汉克尔的复数的代数化理论启发了他关于一般算术及其流形论的构建。[2]高斯把数的概念和几何的量结合在一起的复数解释不再局限于传统的实数系，而是在更加抽象的一般的结构中研究数的性质。[3]汉克尔在他的复数理论中也认为数学的对象不再是数的概念及其表象的符合，也不是各种量的组合，而是一种纯粹的形式理论。胡塞尔认为，除了魏尔斯特拉斯的演讲之外，没有任何关于一般算术的阐述像汉克尔的复数理论那样对他具有如此深远的影响。[4]但是，虚数的几何解释的直观意义并不能作为虚数概念的认识基础，即使是虚数运算法则的确立也没有解决虚数本身的问题。[5]

为了解决虚数存在的认识论问题，胡塞尔分别对四种虚数解释方案给出了分析和反驳，[6]在对汉克尔的形式法则的恒定性原则（Principle of the Permanence of Formal laws）的第五种解释方案的批判基础上提出了流形论的方案。我们在这里将胡塞尔首先提到的四种虚数存在性的认识论方案总结为两类。第一类认识论方案将复数作为一种先天明证性的知识和人类精神自由创造的知识。胡塞尔没有直接反对将虚数作为一种先天的明证性知识，但是他认为这种先天明证性的一般解释并不能解决自然数、无理数、虚数在数系扩展中认识论意义上的明证性层次与存在性差异；与将虚数的存在作为先

[1] Gauss, Carl Friedrich, *Theoria Residuorum Biquadraticorum: Commentatio Secunda* (Sumtibus Dieterichianis, 1832).高斯不满意虚数（imaginary numbers）的称谓，而是选择使用侧向数（lateral numbers）的概念。高斯将侧向数可以看作在实数轴上添加了一个垂直的侧向轴，将实数与复数（如 i）结合在一起。这种表示方法统一了数的几何和代数特性。

[2] 一封胡塞尔可能在 1890 年致施通普夫的信中，他提到虚数问题成为他数学哲学研究中最关切的问题。Cf. Hua XXI, S. 224.

[3] Klein, Felix. Development of Mathematics in the 19th Century. Translated by M. Ackerman, Math Sci Press, 1979, p. 32.

[4] Hua XXI, S. 67-70(Ms.K136).在 1874 年课程讲授中，胡塞尔的老师魏尔斯特拉斯讲到复数理论时认为："对于分析而言，我们需要一个已经由高斯给出的纯粹算术基础。即便复数的几何表示是重要的研究工具，但我们这里一定不要使用它，因为分析必须与几何保持纯粹。"（Cf.Karl Weierstrass, *Einleitung in die Theorien der analytische n Funktionen*, nach den Vorlesungen im Sommersemester 1874 ausgearbeitet von G. Hettner (Manuskript, Mathema tisches Institut, Universität Göttingen, 1874),S.6.）

[5] 在 1834 年 8 月 14 日写给数学家、心理学家和哲学家德罗比施（Max Drobisch）的一封信中，高斯提到了几何表示并不能解决算术的知识性质。Cf. Gauss, "Briefwechsel [zum Fundamentalsatz der Algebra]", in *Gauss Werke*, Band X/1, ed. Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften (Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1973, S.106.

[6] Schuhmann E. and K. Schuhmann,"Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901", 2001, pp. 93-97.

天明证性的观点相反，康托尔、戴德金认为数是人类精神的自由活动。我们可以通过定义新的数克服数域运算的封闭性，而计数只是其中的一种定义方式。例如运算方程 $a+x=c$（$c<a$）虽然在整数域内无解，但我们可以定义存在负数 $x=c-a$ 使得这个方程有解。但是胡塞尔认为不能通过简单的定义来无限制地扩展计数概念的范围，我们必须认识到计数的基本概念本质上回答的是“是多少”这个问题。[1]如果数的概念的定义外延已经限定了数的对象领域，那么任意通过定义扩展一个已有的数的概念的外延会产生与基本概念相矛盾的新概念。胡塞尔认为数学家们似乎仍然接受了这种看似矛盾的理论，但其动机在于从具体的计数概念转向抽象的形式系统。虽然我们不能任意扩展计数概念本身，但我们可以建立新的数的概念系统，通过建立形式系统来定义新的纯粹形式概念，如虚数概念。一旦这种形式概念被界定，数系就可以通过新的、无矛盾的定义得到进一步扩张。

第二类解释方案是从经验归纳以及算术实用性的角度解释虚数的存在性。胡塞尔认为虚数是由逆运算产生的一种无对象的概念，在自然界中没有直接的、可观察的对应物。虚数的基本单位 $i^2=-1$ 并不能直接通过物理感知获得。由于我们在实际生活和科学应用中处理的是各种物理量（如时间、力、长度等），因此分数、无理数、负数和虚数在相应的量的领域中获得了实际意义，它们的物理性质允许我们进行更广泛的运算而不受限于计数的概念领域，但算术的实用性无法解释虚数的存在性。胡塞尔批判了将不同的量的领域对应于同一类数的概念领域的观点。因为不同概念可能由于运算形式的相似性而使用了相同符号，但这种相似不应该被误解为概念的同一性，例如波函数方程中的虚数 i 与交流电压方程中的虚数 i 本质上是不同的。

相比于上述两类方案，汉克尔提出了运用形式法则的恒定性原则解释虚数的存在性问题。他认为在形式系统中，对象只能通过运算和操作确定其性质，同时计算的正确性并不依赖于所操作对象的“可能性”或“不可能性”。只要基本公理和运算规则不发生矛盾，那么我们就可以自由操作包括虚数在内的形式对象。对于任何在实数域中成立的运算法则（交换律、结合律、分配律），如果将其中的实变量替换为复变量，那么该恒等式在复数域中也应该成立。例如，我们可以将实数域的加法原则（a+b）+（c+d）=（a+c）+（b+d）保守地扩张到复数域（a+bi）+（c+di）=（a+c）+（b+d）i。在《形式逻辑与超越论逻辑》研究阶段，胡塞尔认为仅通过形式法则的不变性保证虚

[1] 欧几里德将数定义为“多个单元”（a multitude of units），胡塞尔在算术哲学早期承接了希腊数学的这种定义方式。Cf. Hua XII, S. 5;12.

数对象的存在性是不充足的，我们还需要解决以下问题：

1）在什么条件下，可以在一个形式上定义的演绎系统中自由操作那些根据其定义是虚数的概念？

2）我们在形式化的算术公理系统中操作虚数时，如何确保推理的有效性和结论的正确性？

3）如何将一个良定义（wohldefinierte）的演绎系统保守一致性地扩张为包含有原公理系统和定义虚数的新系统？[1]

上面关于虚数存在性的认识论解释方案的争论实质在于形式化思想引起了内容性直观算术与符号化形式算术之间的张力关系。[2]这种张力关系构成了胡塞尔《算术哲学》的基本问题视域：第一部分处理的是具体直观的数概念系统，第二部分处理的是运算操作产生虚数的符号系统。虚数的认识论难题使得胡塞尔关于数的概念系统与数的符号系统之间的认识奠基关系变成了数的概念系统与符号系统之间进行建构的平行映射关系，但是这种平行映射关系并不倒转为符号系统为数的概念系统奠基的关系。虽然我们对数的符号以及符号系统有很强的依赖性，但符号系统需要概念的充实和解释，符号关系最终需要映射到各类数的概念关系。在数学认识活动和思考之中，概念也总是先于符号而出现。数的概念系统的直观认识无法解释数的符号系统中出现的虚数存在问题。这种直观算术（正整数的构造）与形式算术（虚数及其运算）的张力结构问题困扰了胡塞尔十多年（从 1891 年到 1901 年），[3]使他最终放弃了《算术哲学》第二卷的书写，直到他在这种张力结构中提出了流形论的方案。在《形式逻辑与超越论逻辑》阶段，胡塞尔指出流形论的限定性概念用于阐明数系扩张中虚数的存在性意义以及与该问题相关的汉克尔的“形式法则的恒定性原则”的阐明和改造。[4]由于早期算术哲学中虚数难题的出现，胡塞尔从数的概念系统与符号系统的奠基关系走向了符号系统与数的概念系统的平行关系。

[1] Hua XVII, S. 101.胡塞尔此处所使用的良定义的概念应该来自他在哈勒的同事和朋友康托尔。康托尔首次使用了“良定义”这个词刻画集合的性质:“一个由某个概念范围内的元组成的集合（或者称之为总体、集合），如果其定义基于逻辑中的排中律原则，能够明确地判断以下内容，那么这个集合是‘良定义’的：第一，无论某个对象是否属于该概念范围，都可以确定它是否是集合中的元素；第二，集合中的两个对象，即便在形式上有所不同，也必须能够确定它们是否是相等的。” Cf. “Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten”, *Mathematische Annalen* 15, no. 1 (1879): 1-7.

[2] Schuhmann E. and K. Schuhmann, “Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901”, (2001): 92;96.

[3] 胡塞尔在 901 年 9 月 7 日给纳托普的一封信中提到，1886—1893 年是他在数学哲学领域最艰巨的工作时期。Cf.Hua XXI, SS. 396-397.

[4] 值得注意的是，胡塞尔在这里提醒读者“在我实际上只是作为《逻辑研究》第二卷现象学研究引言的第一卷中，我没有进一步探讨流形理论的问题，因此缺少了与限定性以及虚数的关系，这也是我旧的哲学-数学研究的终结主题”。Cf. HuaXVII, S.131.

2.6 相对完备性与绝对完备性的流形论方案及其限定性解释

胡塞尔对汉克尔的恒定性原则进行了重构论证，并指出了该原理存在逻辑缺陷。他认为可以将汉克尔恒定性原则中的实数与复数域视为两个公理域（Gebiet）G 和 Γ，按照形式法则的恒定性原则，如果公理系统 A_{Γ} 包含 A_G 的所有公理和运算构型，且 A_{Γ} 中不能推出矛盾，则 A_{Γ} 是 A_G 的一致性扩张系统。[1]但现在问题是：如果一个命题 P 在 L(G）中有意义，并且在扩张系统 Γ 中被证明为真，那么我们是否可以接受 P 在 G 中为真？胡塞尔质疑了这一推论：

首先，可以确定的是，任何包含虚数复合概念的推导命题都不会包含不相容性（Unverträglichkeit），它既不会与扩张的公理相冲突，也不会与原始的、更小的域的公理相矛盾。但是，我们如何知道无矛盾就意味着真呢？或者更确切地说：我们如何知道，一个仅包含在狭义概念中，并在其中定义的概念，且不与狭义领域的公理相矛盾的命题，对于这个较小的域是有效的？[2]

胡塞尔认为不能简单地把一个扩张系统 Γ 中的命题直接应用到原始系统 G 中，仅凭一致性是不够的，因为还存在满足该公理系统的其他对象，但是这些其他对象“没有被定义”。一致性条件并不蕴含保守性条件，一致性只保证扩张系统不会导致矛盾，但并不保证扩张理论中的所有定理都可以在原理论中证明。例如，在有理数系 Q 到实数系 R 的扩张中，R 包含 Q 的所有元素，因为每个有理数都是一个实数，R 是 Q 的一致扩张；但$\sqrt{2}$是一个无理数，它在 R 中存在，但不在 Q 中。因此包含了一个在 Q 中为假，但在 R 中为真的命题，R 对 Q 不是保守的。胡塞尔认为尽管在 Γ 中我们可以定义虚数，但 A_{Γ} 相对于 A_G 是一致的，而不是完备的，需要进一步满足流形论的限定性条件定义：

由有限数量的概念和命题以纯粹分析的必然性的方式完全且明确地限定了该领域所有可能形态的总体，因此原则上不再有未定义的东西。我们也可以说：这样的流形具有“数学上可穷尽定义的显著特性”。“限定性”存在于公理概念和公理系统中，而“数学上穷尽”意味着限定性陈述对于流形而言预设了可想象的最大限度的预先判断——没有任何东西未被定义。[3]

[1] 这里我们省略了胡塞尔关于逻辑后承 F_G 的讨论。
[2] Schuhmann E. and K. Schuhmann,“Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901”, 2001, p.98.
[3] Hua III/1, S.153.胡塞尔在《纯粹现象学和现象学哲学的观念》第 1 卷的第 72 节关于数学的本质科学中重新完整论述了他基于哥廷根数学学会讲座中对流形论的定义。

一个域的公理系统是限定的，如果它不留下任何在公理系统内具有意义但未判定的问题。流形论的限定性意味着该领域内的任何命题要么基于该领域的公理为真，要么与公理矛盾而为假。胡塞尔认为，流形论首先具有数学流形的特征定义。数学流形是一个由公理系统定义的数学对象集合。在这个集合中，每个元素都可以通过一系列明确的步骤被唯一地确定或构造。这意味着，给定任何一个属于这个集合的对象，我们都能找到一种明确的方法来描述或识别它，不存在模糊性和不确定性。如果其中一个对象不是由公理系统中的基本概念和公理所定义，那么它就是虚构的对象。但仍然存在一个关键困难：如何判断一个命题是否“属于这个域”？胡塞尔认为只有当公理完备地界定了这个域时，才能预先确定命题与公理的关系。

胡塞尔由此引入了希尔伯特关于公理系统的闭合性概念：一个公理系统是闭合的，如果它确定了其思想对象的领域，以至于没有任何新的对象可以被添加到该领域中，否则就会产生矛盾。也就是说，在闭合的公理系统中，该域已经被完全限定，不可能进行扩张。胡塞尔认为这种公理系统的闭合性通常需要添加闭合公理才能实现，相关域由这些公理确定，其他公理无效。这种在希尔伯特意义上的完备性意味着，在该流形中，所有符合其公理和定义的命题都可以在逻辑上得到验证或推导。然而，胡塞尔对这种完备性持批判态度。虽然通过闭合公理实现的“完备性”在形式上可行，但它缺乏实质意义，无法真正揭示数学系统的本质。胡塞尔认为这种完备性不是真正的完备性，而是一种“拟完备性”。我们在下一节将对胡塞尔和希尔伯特的完备性进行进一步的区分。胡塞尔以算术系统的扩张为例，进一步讨论了希尔伯特对无理数的数系扩张与公理化构造。希尔伯特认为，人们可以在不预设无穷过程的前提下，通过添加阿基米德公理使得算术公理系统证明无理数在实数域的存在，[1]构造一个闭合的实数公理系统。在传统的皮亚诺算术公理系统中，自然数在数轴上是离散的、有间隙的。阿基米德公理表明任何两个正数之间总存在第三个正数，只有引入该公理，才能弥补有理数系的不连续性，确保实数系的连续性，证明无理数（如π、$\sqrt{2}$等）的存在。

胡塞尔认为这样一个带有闭合公理的公理系统是无法被扩张的。以算术为例，一个公理系统是否具备扩张能力，取决于它对可能的运算构型是否保持开放。如果对于相同的运算形式和关系形式，该系统还可以增加更多的公理，那么该系统就具有扩张到新域的能力。问题的关键在于，是否存在不包含希尔伯特意义上的闭合公理，但依

[1] Hua XII, S.445.

然可以判断每个命题在相应演绎领域内的真假？ 在限定流形论的基础上，胡塞尔提出了相对完备的流形论与绝对完备的流形论解决该问题。

如果一个公理系统按照其定义在自身领域内不对可能的运算构型保持开放，但可以扩张到更广的域，并且允许在原有公理基础上增加新公理，那么我们就称这个公理系统为相对完备的。在相对完备的公理系统中每个有意义的命题都可以被判定为真或假，例如整数域、有理数域等，它们自身是确定的，但可以通过增加阿基米德公理扩张到实数域。胡塞尔同时指出欧几里得几何作为一种相对完备的流形是系统的变量曲率流形（Mannigfaltigkeit von variablem Krümmungsmaß）中的一个个例。

相反，如果一个公理系统通过扩张后已经定义了所有命题，不对任何运算构型保持开放，那么这个公理系统就是绝对完备的。这种闭合的公理系统内部是完备和一致的，不允许通过添加任何新的公理或者引入新的对象进行对外扩张。同时不再局限于某个特定领域,而是要求公理系统中的每个有意义的命题都是已经蕴含和可判定的。[1]例如，自然数集 N 可以被视为一个相对限定的系统。在自然数集中有一组公理（如皮亚诺公理），这些公理定义了自然数的基本性质。在自然数集的范围内，每个有意义的命题都可以被判定为真或假，不能再添加新的公理。然而，当我们将自然数集扩张到整数集 Z 时需要引入新的概念，如负数和零。这些概念不能仅仅通过自然数集的公理来定义，我们需要引入新的公理来描述它们的性质。因此，整数集是一个相对于自然数集的相对限定的流形。类似地，我们逐步引入新的概念和公理，如分数、无理数和连续性，将整数集扩展到有理数集 Q 再到实数集 R 的整个实数连续统。最终我们从相对完备性的流形论进入绝对完备性的流形论。

2.7 希尔伯特和胡塞尔论完备性：句法完备性与语义学完备性

胡塞尔认为他在哥廷根数学学会上提出的确定性的流形理论与希尔伯特在《几何基础》中引入的完备性公理在哲学和数学中具有共同的理论意图，而且其内涵也具有相似性。

> 在目前的论述中，我一直使用“完备公理系统”这一表述，它最初不是我的,而是来自希尔伯特。希尔伯特没有受到决定我研究的哲学逻辑思考的指导，

[1] Schuhmann E. and K. Schuhmann, “Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901”, 2001, p.117.

而是独自得出了他的完备性概念（当然，这与我尚未发表的研究完全无关）；特别是，他试图通过添加一个单独的“完备性公理”来完善公理系统。[1]

胡塞尔在双重讲座中同时用本质的完备性与非本质的完备性来描述相对限定的完备性与绝对限定的完备性，并将后一种完备性等同于希尔伯特意义上的完备性。

2.7.1 流形论的句法完备性解释及其批评

希尔伯特公理化思想的初始阶段从 1898 年持续到了 1901 年。在此期间，胡塞尔在希尔伯特的帮助下获得了哥廷根大学的教职，两人在这一时期共同讨论了数学对象的存在性问题。为了解决数学对象在公理形式系统中的认识问题，希尔伯特将数学对象（虚数）的存在性问题转化为公理系统的一致性问题，系统的一致性条件保证了数学对象的存在性，完全不涉及对物理实体的解释。他主张数学研究的核心在于对象之间的关系，而非对象本身的具体性质，“人们必须在任何时候都能够用桌子、椅子、啤酒杯这样的词来替换点、线、面这些词”。[2]因此，希尔伯特的完备性是依据句法关系而非诉诸语义概念来确保数学对象的存在有效性。外尔将希尔伯特的这种形式主义思想描述为用无意义的公式游戏取代内容数学，认为他的目的“不是确保真理，而是确保分析的一致性”。[3]

胡塞尔在第二次流形理论讲座上一开始就提出了限定性流形与数学流形是否可以等同的问题。胡塞尔认为绝对完备或者确定性的流形理论的特征在于公理系统的完全闭合性，公理域内所有的运算操作及其元素都被明确定义，不存在未定义的部分。胡塞尔在此意义上将限定性流形等同于希尔伯特所定义的数学完备性，[4]尤其是他为实数系提出的完备性公理。胡塞尔记录了他与希尔伯特关于算术完备性的讨论，“希尔伯特所提的问题是，我们是否可以说，根据正整数的公理，每一个只涉及正整数的命题

[1] 具体论述可参见 Hua XVII, S. 101;相同的论述也出现于 Hua Ⅲ/1, S.153。

[2] 这段文字虽然常常被引用来说明希尔伯特的形式主义观点，但在希尔伯特本人的著作中并没有严格的出处依据，实际上来自希尔伯特与数学家奥托·布卢门塔尔（Otto Blumenthal）的一次对话。相似的论述可参见 Gottfried Gabriel et al., eds.,*Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges* (Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1980),S.13。

[3] Hermann Weyl, “Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik”, Symposion 1 (1925): 1-23.胡塞尔在《形式逻辑与超越论逻辑》第 31—32 节对流形论进行定义和论述后，然后对真正的形式数学与游戏规则数学进行了区分。但通常对希尔伯特形式主义是一种游戏数学的认识是一种流俗的观点。这种观点受到希尔伯特数学哲学研究者基于有穷主义证明与元数学理论的严厉反驳。Cf. Richard Zach,“Hilbert’s Program”, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. Edward N. Zalta (Stanford, CA: The Metaphysics Research Lab, 2014).

[4] Schuhmann E. and K. Schuhmann, “Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901”, 2001, pp.99;102-103.

要么为真，要么为假？”[1]胡塞尔认为这个问题意味着我们可以对正整数域进行公理化的有穷描述，且这种描述是完备的。胡塞尔在随后的讨论中给出了实现正整数公理系统完备性的条件：a）对于每个关于正整数的数值方程，如果能化简为恒等式则为真，否则为假，不存在不可判定的情况。b）如果公理系统只包含有穷的运算（如加法、乘法等）和关系（等式、不等式），就可以完备地描述正整数的性质。这种通过有穷公理系统来刻画整数的运算和关系正是希尔伯特后来论证初等算术一致性时的证明论观点。[2]相对于算术的完备性方面，胡塞尔在讲座中同时讨论了希尔伯特的几何的完备性概念。他认为可以将几何的完备性问题还原为算术的完备性，如果空间中的任何一个点都可以在公理系统中被构造为空间关系的代数表达式，那么这些点就成为公理系统中的任意元素，而且每一个元素都可以通过公理运算得出确定值。公理系统足以证明任意几何命题，因此可以实现完备性。

值得注意的是，在谈到空间中点的离散型特征时，胡塞尔表示了对完备性公理的质疑，“完备性从来不是公理，而是限定公理系统和流形论的一个定理”。[3]在胡塞尔看来，完备性不应该被视为一个原始的公理（自明的假设），而应是对一个公理系统的推论或定理。也就是说，完备性是系统在定义和结构上的一种属性，而不是它的基础。如果我们仅仅通过定义某些公理系统的“闭合性”，以确保所有命题都能够被系统地推导出来，那么这种完备性并没有真正的意义，反而可能掩盖了它的真正意义。正如胡塞尔前面对希尔伯特实数定义的分析表明，实数集被假定为一个“完备”系统，即每个非空的、有上界的实数集合都有一个最小上界（或称为“上确界”）。但这种形式化的“完备性”是虚假的，因为它是一种通过假设来达到的形式化结果。虽然胡塞尔认为限定流形论包含数学流形论的定义，并可以将流形论的绝对完备性或限定性等同于希尔伯特所定义的完备性，但这不意味着希尔伯特的句法完备性可以完全等同于胡塞尔的流形论，尤其是相对完备性的流形论。完备性不应该仅仅是形式上完成的闭合性或逻辑的完整性，真正的完备性应该是在更加深刻的层面上揭示出系统本身的意义和结构，它不应被简单地当作一个公理来接受，而是应作为一个通过系统推导的定理。

胡塞尔同时参与了希尔伯特和弗雷格关于数的概念与形式系统的定义问题的争论。

[1] Schuhmann E. and K. Schuhmann, “Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901”, 2001, pp.105-106.
[2] Schuhmann E. and K. Schuhmann, “Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901”, 2001, p.89.
[3] Schuhmann E. and K. Schuhmann, “Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901”, 2001, p.102.

胡塞尔认为，弗雷格并没有理解希尔伯特关于几何学的公理形式化思想。这种公理化的几何只是一个纯粹句法形式的约定系统，是系统间的演绎关系定义了对象领域，不存在弗雷格所说的对象与概念之间的语义指称解释。[1]但这并不意味着胡塞尔本人完全赞同希尔伯特的形式系统定义立场。胡塞尔的流形论方案是建立在对汉克尔的形式法则的恒定性原则批判的基础上，该原则的核心是一种希尔伯特意义上句法性描述：只要基本公理和运算规则不发生矛盾，那么就可以自由地操作任何形式对象。胡塞尔不承认形式公理系统可以完全独立于对象自身的直观领域，他明确地反对了数学家们不顾既定的理论科学，自由地构建流形形式或相应的演绎科学形式。[2]这一点从胡塞尔在其算术哲学中坚持数的概念内容的直观性定义而反对弗雷格关于数的外延的等数性定义就可以证明。[3]

2.7.2 流形论的语义学解释

与绝对完备流形论的希尔伯特式解读不同，我们将在公理化的基础上，论证胡塞尔的完备性是一种具有模型论语义学和意向性的描述完备性。胡塞尔在哥廷根数学学会讲座中提出流形论方案的目的在于解决形式数学与实在数学及其特殊认识领域之间存在的应用关系问题,他认为该问题的解决对于应用数学和纯粹数学具有根本意义。[4]流形论不同于句法形式的游戏数学，它蕴含着待充实的意向性意义，指向的是一个具有规律科学统一性的无限对象领域。作为一门形式等同（äquiform）的演绎科学，它提供一种统一的方法来理解不同的理论科学的结构，这种数学结构可以反映科学理论的本质理论，从而将数学概念与科学解释的问题联系起来。[5]胡塞尔和希尔伯特的学生曼科（Dietrich Mahnke）在对公理形式系统的完备性和流形论的研究中也指出，胡塞尔的流形论及其直观内容具有“在形式上是等价的”或“在逻辑上是同构的”特点。[6]而在模型论中，两个结构 A 和 B 之间如果存在一个同构映射（isomorphism），那么 A 和 B 被称为形式等同的或者同构的（äquiform）。也就是说，A 和 B 虽然具有完全相同的形式结构，但其内容元素可能不同。

[1] Hua XII, S.447-448.
[2] Hua XVII, S.98.
[3] Hua XII, S.118-121.
[4] Schuhmann E. and K. Schuhmann, “Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901”,2001, pp. 92;110.
[5] Hua XVII, S.99-100.
[6] 迪特里希·曼科：《从希尔伯特到胡塞尔：现象学，特别是形式数学现象学的初步导论》，于宝山译，《现代外国哲学》2023 年第 1 期。

因此，流形论的完备性蕴含形式语言与其语义模型之间的对应关系，接近于现代模型论的解释。在模型语义学中，描述完备性指的是一个形式语言系统能够完全描述其模型中的所有性质和关系：对于形式系统 L 的任一模型 A，以及 A 中的任何 n 元关系 R，在 L 中都存在一个公式φ（$x_1...x_n$），使得对于 A 中的任意元素 $a_1...a_n$，当且仅当 R（$a_1...a_n$）在模型 A 中为真时，公式φ（$x_1...x_n$）为真。按照胡塞尔的观点，诸多单个的科学领域在形式上存在相同的形式理论。[1]流形论的完备性可以理解为公理系统 L 能够完全描述一个形式上确定和等价的对象领域 A 中的所有命题。我们可以用该系统的句子描述任意形式上等同的模型领域中的对象、关系和运算，给出一个句子的模型就是给出该句子为真的解释。这种描述完备性反映了形式语言 L 与其语义模型 A 之间的语义对应关系。尽管公理系统的一致性可以在不证明它不具有对应模型的情况下得到证明，但这种纯粹句法的一致性并不能保证它在物理现实中对应模型的语义真值。同时，一个逻辑系统可以是模型论中描述完备的，但同时在证明论中是不完备的。例如，二阶逻辑是描述完备的，它可以唯一地描述自然数的所有性质（皮亚诺算术），但在二阶逻辑的演绎系统中无法通过算法来判定一个公式的有效性。在这个双重完备性的意义上，胡塞尔作出了断言：我们不可能仅仅实现一种高阶流形的形式数学而脱离意义范畴和对象范畴。[2]

2.8 本章小结

本章阐明了 19 世纪数学基础领域中微积分的形而上学问题之争如何开启了胡塞尔现象学的认识论发端。魏斯特拉斯引导的严格分析的算术化运动用ε-δ的极限定义取代了无穷小量 dx，将微积分的基础归结于对自然数概念的定义。胡塞尔结合魏尔斯特拉斯的算术化进路，并运用布伦塔诺对本真和非本真表象的区分对数概念的起源和内容进行了心理学和逻辑学层面的分析，提出了基数构造理论与符号定义系统两种方案解决微积分的形而上学问题争议。但此两种方案无法解决数系扩张中虚构数的难题。为了解决数概念起源中虚数的存在性问题，胡塞尔与希尔伯特在哥廷根数学学会上分别以哲学的方式和数学的方式提出了两种不同的“完备性”概念。胡塞尔的完备性概念基于相对完备性与绝对完备性的流形论方案及其限定性（definiteness）解释。这种解释

[1] Schuhmann E. and K. Schuhmann, “Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901”, 2001, p.92.
[2] Hua XVII, S. 87.

充分说明了一般的算术集合论解释与几何拓扑学解释不足以完整地刻画流形论的本质，还存在一种流形论的公理化与语义学解释。从胡塞尔对流形论中形式数学与实在数学的关系论述和对希尔伯特将完备性作为公理而非定理的批评可以得出，希尔伯特的完备性是一种满足一致性定义的句法完备性，而胡塞尔的完备性是一种蕴含意向性和模型论解释的语义完备性。

第 3 章 数学对象的范畴直观及其认识论问题

因为我们都至少学习了一点数学，并在此过程中自主获得了数学的洞见。但我们从未学习过如何观察数学化行为的内在性，并关注其中的普遍性是如何从必然性中产生的。[1]

——胡塞尔

只要我们还不具有关于数学的意义和影响的最终澄清，我们就不知道，数学成就了什么， 在何种意义上它可以以终极的方式来被主张。[2]

——胡塞尔

3.1 引言

本章将以数学对象的无感性内容、全时性、无对象性的认识特征为出发点，在讨论胡塞尔对于范畴直观的对象直观层的单方面的奠基性与意义充实层的分节的相合性两种定义的基础上，进行数学对象的认识现象学解释，最后以胡塞尔博士论文中的变分法为例示，讨论本质变更在数学证明中的应用。

我们将首先讨论三种范畴对象的本质类型以及与之相关的给予方式，分析胡塞尔在第一种范畴直观定义下范畴代现、心理联结、现实实行三种方案的不可行问题，指出第一种定义下从感性直观到范畴直观的奠基性定义存在着一种隐喻类比论证，并且认为基于这样一种主导但不适当的范畴直观理论无法解释数学对象的认识论问题。通过分析数学概念的无对象的表象悖论问题以及意义与对象之间的不对称关系，我们从意向性的相合（Deckungseinheit）综合的第二种范畴直观定义出发，论证数学对象的充实依赖于理论化的过程。这种数学对象的范畴充实解释使我们能够理解形式数学证明的认识论意义。

[1] Hua IX, S. 87.
[2] Hua XXIV, S. 161.

3.2 数学认识对于范畴直观的意义

数学认识的可能性问题一直是胡塞尔现象学的必要组成部分，对其有效性进行论证对于现象学自身的合法性有着决定性的意义。胡塞尔认为现象学的突破来源于他对算术哲学和纯粹数学的意义研究和成就构造。[1]他一方面将数学方法作为现象学发展中暗含的方法和模型；另一方面，数学知识又必须通过现象学的认识论方法进行反思和奠基：

> 当我缓慢而艰难地试图勾勒数学思想的逻辑，特别是数学演算的逻辑时，我被那些难以置信的奇怪领域所折磨：一方面是纯粹逻辑的领域，另一方面是意识行为领域—或者如我现在所说的现象学领域以及心理学领域。我不知道该如何把它们结合在一起，可它们彼此之间肯定存在着某种关系，并由此结成一个内在的统一体。[2]

数学对象在意识中直观显现和有效性构造是数学认识论的主要课题。胡塞尔认为现象学的数学认识论的重点在于纯粹形式对象的范畴性质的澄清和直观构造，但由于他致力于超越论哲学的系统构建，无法为数学和逻辑学的现象学研究付诸在《逻辑研究》时期那种激情般地参与，因此也就无法产生成熟的工作。[3]我们将在下面从三种范的类型及其直观模式的区分开始，进行数学对象的现象学的认识论分析。

3.3 范畴对象的三种类型及其直观模式

胡塞尔在《第六研究》的第 60 节中讨论了范畴的本质类型以及与之相关的意向性。他根据直观和给予的对象类型的不同，区分了三种本质类型：

> 我们区分为我们提供了“感性概念—并且是纯粹感性的或与范畴形式相混杂的概念—的“感性抽象”与会为我们提供了“纯粹范畴概念”的“纯粹范畴抽象”。“颜色”“房屋”“判断”“愿望”是**纯粹感性的概念**，“有颜色状态”（有颜色一存在）、“德行”“平行公理”等等是**范畴混杂的概念**，“一”“多”

[1] 胡塞尔：《<逻辑研究>第二版“序言”草稿的两个残篇（1913 年 9 月）》，倪梁康译，《中国现象学与哲学评论》2014 年第 1 期，第 221-279 页。

[2] Hua XIV, S. 43.

[3] Hua XIX/2, S. B_2III.

“联系”“概念”是**纯粹范畴的概念**。[1]

胡塞尔区分了范畴概念的三种基本形式，以此表明范畴直观的概念是精细和合理的。我们将在此基础上继续分析范畴直观的三种类型，指出每一种类型都有其独特的综合充实模式，并不存在一个统一且单一的直观模型。[2]同时，我们在这里讨论的范畴直观是包括总体化、理想化、形式化在内的一般意义上的本质直观。

3.3.1 经验范畴对象中的总体化与想象变更

第一类是感性概念的经验本质，例如植物、颜色等。它们具有形态学的属性，而形态学上的感性本质表现为一种基于个体对象及其属性的直观方式，胡塞尔认为我们可以通过素朴抽象（schlichte Abstraktion）而获得此类范畴对象。[3]同时，由于感性本质并非抽象的普遍性，而是通过具体的个体对象及其属性在意识中被给予的。为了把握这种本质，我们也可以通过想象力的自由变更，呈现一系列类似的个体实例，并在这些变相中提取出不变项的本质类型。这些变项不仅仅是彼此相似的，而且是属于同一个概念之下的，因此表现出相同的本质。面对一张红色的桌子，通过想象变更，我们可以将桌子的颜色从红色变为蓝色、绿色、黄色等，同时保持其他属性（如形状、材质）不变，从而获得红色的一般概念。同时，我们可以改变桌子的颜色、材质、形状等属性，例如将红色的木制方桌变为蓝色的金属圆桌。在这一过程中，尽管具体的属性发生了变化，但桌子作为一个具有平面和支撑结构的对象的基本功能（如用于放置物品）保持不变。我们由此可以把握到桌子的本质。在这个过程中，我们可以注意到，本质直观的变更过程与感性直观的侧现在行为结构上具有相似性。感性直观通过感知对象的多个侧面综合统一为对象的整体理解，而本质直观则通过想象变更中的多个实例逐步揭示作为本质的不变项。我们会在本章的最后一节讨论本质变更在数学证明中的应用。

3.3.2 混合范畴对象中几何对象与理想化

第二类是感性本质与范畴形式混合的本质概念，尤其是几何学的形态本质。胡塞尔在的第一研究第 18 节中对几何直观的示例中说明，当我们在纸上绘制图形作为数学推理的辅助时，一个在纸上想象或画出的线段并不是，也不可能是对一个直线的充实的

[1] Hua XIX/2, S. A656/$B_2$184.
[2] 胡塞尔在《纯粹逻辑学导引》（《逻辑研究》第 1 卷）的第十一章中将范畴区分为含义范畴和对象范畴。
[3] Hua III/1, S. 155.

感性直观。从画出的线开始，我们用感性直观将其划分为越来越小的部分；这种划分最终到达一个可见的最小值，即一个最小的点。但一个视觉上的点不能充实为几何学意义的点。他进一步指出，没有一个几何概念可以通过这种方式被完全地感知。我们想象或绘制直线只是为了理解的补充，实际上这种感性直观中的个体对象并非是在几何证明中的普遍对象。因此，胡塞尔认为“几何学意义上的图形是一个理想的极限（ideale Grenze），它绝对不能在具体直观中显现出来。”[1]几何本质形态在直观上是不可代现的，因为在其概念范围内没有任何感性直观，不可能直接基于感性直观的个体而显现。同时，几何本质直观也不可能基于任何感性内容的想象变更而获得。这种几何学的理想化（Idealisierung）的方式，是从一个形态学上所描述的不完整或不准确的示例（如曲率不同的直和圆）开始，然后进行精确化，最终通过趋向极限来确定一个完整的形式（如数学理想化概念的直线、圆、平面）。[2]这种极限物是基于形态学的直观和理想化而产生的，并不能等同于在想象变更中作为本质的不变量。我们将在这一章的最后一节中，进一步分析数学证明中极值求解与本质变更的相似性。

> 整个在莱布尼茨意义上的普全数学模式（mathesisuniversalis）都可以被纳入到纯粹逻辑学中。但我把几何学看作例外， 这只是因为我（在与我自己斗争了很久之后）已经放弃了对它做不同于力学的评估。[3]

这种感性形式的求极限的理想化方法，与胡塞尔在《几何学起源》中对几何的算术化的考察是一致的。他首先探讨了基础几何概念的起源和内容，继而研究了公理和几何空间的本质。[4]例如，从欧几里得几何学到纯粹的句法形式的陈述系统，其中点、直线和平面不再表示通过从点、线和平面的形态理想化获得的原始几何理念，而是表示遵守公理中规定的结构规则的任意对象。虽然原始的几何对象被认为是在先于任何公理之前以及任何基础理论的证明之前给予的，但是在现代数学认识中，严格意义上的几何对象的给予是基于公理系统和命题关系的定义和推导。这意味着证明的明证性随后取代了感性代现的明证性。[5]我们已经在第2章第二部分关于胡塞尔的流形论与完备性中处理了数学对象在公理系统中的定义和存在问题。

1 Hua XIX/2, S. A605/$B_2$133.
2 Hua III/1, S.154-156.
3 Brief.V, S. 53-54.
4 Hua VI, S. 375.
5 Hua XXI, S. 295.

需要注意的是，胡塞尔在论述理想化行为时，用“Ideal”一词同时指代“观念”（Idee）和“理想”（Ideal）两个概念，从而造成了混淆。例如他将通过“观念直观的抽象”所把握到的东西称为“理想本质”（Idealwesen），也就是“观念”。[1] 但是理想化的几何学的精确概念是数学或自然科学的本质；而“观念”则是现象学的概念，它们所表述的是通过“本质直观”所获得”。[2]因此，“观念化”（Ideierung）与“理想化”（Idealisierung）是两个范畴层次上的不同的认识行为，它们分别代表了现象学与自然科学的方法特征。

3.3.3 纯粹范畴对象与形式化

第三类是纯粹形式的范畴概念，包括语法概念（如“和”“或”“如果…那么”等）和数学逻辑的范畴对象（如“集合”“数”“某物”）。胡塞尔认为所有的逻辑形式和数学公式都是纯粹范畴的。纯粹逻辑学、纯粹算术、纯粹流形论，在其整个理论组成中都不包含任何感性的概念。[3]这种本质概念不是通过从具体质料中进行总体化和理想化中得出的，而是通过形式化过程获得的。同时，胡塞尔在《纯粹逻辑学导引》（《逻辑研究》第 1 卷）第十一章中明确区分了范畴的两种类型：含义范畴与对象范畴，诸如“对象”“事态”“一”“多”“数”“关系结”等概念，被胡塞尔归入纯粹的或形式的对象范畴。[4]这些范畴构成了纯粹逻辑学的核心内容，因其抽象性和普遍性而被称作“纯粹”或“形式的”。它们并非源于感性经验的具体质料，而是作为逻辑思维的空形式的基本结构而存在，其认知功能不依赖于任何具体认识内容的特殊性。例如，“和”作为一种逻辑连接形式，其功能在于建立概念间的结构关联，而不因经验内容的总体化和理想化的变更而改变。而在《逻辑研究》的“第三研究”中，当胡塞尔转向整体与部分关系的分析时，这一形式对象范畴的适用范围被显著窄化了。具体而言，范畴直观中的第一类范畴和第二类范畴的内容变更中已经预设了整体与部分之间的某种先在关系。然而，在第三类形式范畴对象：语法概念（如主语、谓语的逻辑结构）以及数学逻辑中的范畴对象（如集合、函数、命题关系）中，这种形式化的空形式虽然为逻辑的普遍性提供了基础，却在本质直观的操作中引入了困难。[5]具体而言，本质

[1] Hua III/1, S.138.
[2] Hua III/1, S.139.
[3] Hua XIX/2, S. A657/$B_2$185.
[4] Hua XVIII, S. 244-246.
[5] 关于本质直观中形式化与整体—部分关系的进一步讨论还可参马迎辉：《时间性与思的哲学》，江苏：江苏人民出版社，2020 年，第 221-225 页，以及 Dominique Pradelle, *Intuition et idéalités. Phénoménologie des objets mathématiques*,

直观依赖于想象内容的变更，即通过在意识中自由变换对象的可能属性来把握其不变的本质。形式化的空形式使得本质直观中想象变更的操作缺乏质料支持而变得困难。

面对这一问题，胡塞尔在《观念 1》中区分了总体化与形式化的本质类型的不同：总体化是在事物的种属序列中进行的普遍化，是一种在区域本质中不断向上递进的本质普遍化，最终达到极限形式的最高种类，例如在生物学中对生物分类的层级系统：界、门、纲、目、科、属、种，从最广泛的“界”到最具体的“种”。这一分类系统体现了一般化的过程，这是我们在前面已经分析过的经验本质类型。而形式化则不同，它彻底排除了与经验世界对象相关的所有内容，无论是感性的本质内容（如“红色”“颜色”），还是形态的观念（如“点”“圆”）。从语法学的角度来讲，形式化完全清空了语法核心（包括基质、属性、关系）的具体内容，而只保留了普遍的某物的纯粹形式，即一个空的某物。[1]同样，纯粹范畴的数学对象也是完全形式化的，它是抽空了所有的内容和意义的空的某物，无法通过自由变更或理想化方法进行本质的获取，因为这两种方法都涉及对具体质料或内容的运用。

那么我们如何获取形式本质呢？首先，纯粹范畴本质不能和几何本质一样通过理想化，从几何形态上曲率不同的直线获得曲率极限为零的直线，几何学上的极限形态并非空的某物的形式，并没有排除理想化过程的质料。其次诸如“和”这个语法形式和基数也不是由自由变更一系列对象（或内容）的性质而直观到的本质。完全任意的变更红色、蓝色、绿色、我们会得到颜色作为区域本质的最高属，而不是一个纯粹的排除任何实事性（Sachhaltigkeit）的空的某物。[2]因为，空的形式的某物不像诸如“红色”的存在于各种不同的红色色调中，“颜色”存在于红色和蓝色中一样，也没有预设任何整体与部分的关系存在。对于语法联结词“和”或一个数而言：要么是一个数“3”，要么不是“3”，中间不存在任何属性和性质的变更内容域。[3]

因此，综上所述，感性直观是对实际个体对象的给予；经验质料的本质直观是对质料本质的给予；混合范畴直观是对质料和形式本质混合物的给予；最后，范畴直观是对纯粹形式本质的给予，它们之间并不存在一个统一且单一的直观模式。对于数学对象的纯粹形式本质的把握，我们首先分析数学对象的范畴性质，然后在 3.6-3.8 节给出

Paris : Presses Universitaires de France, 2020, pp.57-94.

[1] Hua III/1, § 33.

[2] EU, S. 433-434.

[3] Pradelle, Dominique. “III. Un ciel sans éternité : la constitution des idéalités catégoriales.” *Monde, structures et objets de pensée. Recherches de phénoménologie en hommage à Jacques English*, edited by Jean-François Lavigne, Hermann, 2016, pp. 87–125.

基于范畴充实的分节行为与意向性相合的数学直观的解释方案。

3.4 数学对象的范畴性质

3.4.1 数学对象的全时性与无感性内容

胡塞尔从静态现象学到发生现象学的转变中，关于数学对象与时间性的关系论述也发生了关键转变。在《逻辑研究》时期，他认为数学对象是外在于时间的（Unzeitlich），[1]而在《经验与判断》中，胡塞尔则从构造性的角度将数学对象定义为全时性（Allzeitlich）的。因此，一方面，数学对象作为形式对象，它们始终可以被任何意识重新理解，它们被认为具有超时性的存在，不与特定的时间段相对应，而是与整个时间范围相一致。[2]另一方面，作为形式对象，它们的概念中不包含任何感性内容，而是指涉纯粹地适用于一般对象的结构，保持纯粹的形式特性。我们现在转向这个问题：在范畴直观的充实中，感性内容究竟具有什么样的要素作用和认识功能？感性材料（质素）首先在一定程度上限制了直观对象，我们无法随意改变或重新排列感知对象或对象的各个要素。但与此同时，数学对象的范畴直观中缺乏感性材料，这种缺失为数学直观的范畴充实带来了真正的问题。

就像每个陈述的实现都必然存在一个关于“是”的直觉，数学形式理念中的“点”“直线”“整数”“连续性”等也必然存在一个直观。那么，这样的直观是什么？我们是否能通过超越性的反思揭示它们的结构。由于胡塞尔对范畴直观的解释存在缺陷，特别是“范畴代现”出现的困难，导致这一理论不能充分解释现象学的数学认识论问题。因此，我们有必要对数学对象的范畴直观进行根本性的重审，但这种重审并不是完全放弃范畴直观理论，而是要消除其中的误导性动机。如果将数学认识理解为一种范畴性直观活动，那么现象学的直观理论就可以为数学直观提供严格的认识论基础。

3.4.2 数学范畴的无对象性及其表象悖论

在第二章的流形理论中，我们已经分析了胡塞尔为了解决虚构数的无对象的数学概念存在的问题建构了流形论。在这里我们将进一步研究，在数学范畴的无对象性及其悖论带来的数学直观问题。

波尔查诺首先提出了数学范畴的无对象的表象悖论问题。根据波尔查诺的说法，一

[1] Hua XIX/1, S. A124/$B_1$123.
[2] EU, § 64.

个句子自身（Sätze an sich）由更小的、子命题的组成部分构成，他称之为“自在表象”（Vorstellungen an sich）或客观表象。例如，3是一个质数可以分解为对数字3的表象、一种连接表象以及对质数属性的表象。这些自在表象就像句子自身一样是抽象实体，它们是由句子“3是一个质数”的各个部分所表达的。[1]与命题不同，客观表象不是真或假的判断，而是具体的，如果有某物被它们所表达，就是具有对应对象的；如果没有任何事物符合它们，则是无对应对象的。波尔扎诺指出，存在一些表象并不对应任何实际对象。“圆的正方形”是一个逻辑上不可能的对象，而“当今的法国国王”则是一个现实中不存在的对象。波尔扎诺引入“无对象的表象”（即逻辑上不可能或矛盾的表征）的概念，是为了解释数学家在数学语言使用中的某些现象，特别是在涉及矛盾或不可能性时的表达方式。这一概念的核心在于，尽管这些表象在逻辑上是不可能的（即它们不涉及任何实际存在的对象），但它们在数学推理和表达中却是不可缺少的。波尔差诺认为，与实数不同，虚数（$i^2 = -1$），并不直接指代任何具体实体，也不存在直接的物理意义。虚数的存在性和合理性并不依赖于它是否代表一个具体的对象，而是依赖于它在数学体系中的有效性，因此这种无对象的表象在命题和判断中的存在被认为是必要的。

胡塞尔在波尔查诺的基础上，通过区分实在实存（real existence）和意向实存（intentional existence）来解决无对象的表象的悖论问题。他将不同于实在实存的意向的实存规定为在表象中“被给予之物显现”（bloß Vorgestelltwerden）的存在，即一个表象无论内容如何（即使是悖谬或自相矛盾的），它总是指向某个对象。每个表象总是存在一个由其表象的对象，但这个对象的存在状态是“意向的实存”，并不必然意味着其具有“真正的实存”。尽管某些表象没有实际对象，但它们仍然具有意义。[2]例如，“圆的正方形”可以被理解为“一个既圆又方的对象”，尽管这样的对象不存在。胡塞尔认为，表象通过其“内容”或“含义”与对象关联。

> 而这与如下这种无疑是有根据的说法是一致的：每个（主观）表象都凭借其“内容”，**即其含义而关联于对象**。如果将“含义”和“对象”调换一下，这一

[1] Bolzano, B. *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter*. Vol. 1, J. E. v. Seidel, 1837, §54, p. 237;§48, p. 216.

[2] 埃德蒙德·胡塞尔：《文章与书评（1890—1910）》，高松译，商务印书馆，2018，第 350—351 页。

说法就会是悖谬的。[1]

表象并非由含义和对象的平行组合关系形成。在表象行为中，含义是第一性的，而对象则是第二性的。表象首先由含义构成，而对象则是通过含义被关联起来的。胡塞尔在这里谈及的是范畴对象，而非感性对象。因为对于感性对象而言，意义与对象之间的关系在于：我们不是仅仅通过一个包含该对象的范畴作为中介（例如，通过树的一般意义作为中介来把握一棵具体的树）与对象建立联系，而是在每一次侧现中（特定的角度、一定的距离、昏暗明亮的光线条件下）直观对象。其中每一种显现方式都构成了一种特殊的感知充实意义，这些感性感知的多个侧面综合为显现对象的统一。[2]胡塞尔还通过表象中含义和对象的不对性区分了实在数学与形式数学的直观问题。他认为形式数学是一种完全脱离具体直观经验的推理方式，它不依赖于实际的、感性的直观，而是在形式化中探讨数学对象在系统中的含义。而与形式数学不同，实在数学的基础是直观经验，它的概念和命题都建立在对感性直观对象的把握之上，从直观中获得其实在性。[3]对于胡塞尔来说，意识的意向性也是如此：

> 每个意识相关项都有一个内容（Inhalt），即它的意义（Sinn），通过它的中介性（durch ihn）与它的对象（Gegenstand）相关。[4]

因此，数学对象关于意识的直接给予是不可能的，它与对象的关系只能通过意向的意义中介而实现：只有意义的充实才能通达对象。然而对象和含义在表象中的这种不对称性，尤其是数学概念无对象问题，直接引起了范畴直观的定义和应用问题。

3.5 范畴直观的第一种定义：感性直观与奠基性定义

胡塞尔在《逻辑研究》第六研究中区分了素朴直观和范畴直观，这一区分是现象学知识理论的核心。素朴直观是直接的、感性的直观形式，它在一个单一行为中“一下子”呈现对象，例如感知一个红色苹果。这种直观是独立的，不依赖于其他行为。相比之下，范畴直观是被奠基的，它建立在素朴直观的基础上，通过综合多个素朴直观行为，形成对范畴对象（如关系、状态、属性）的意向。例如，当我们说“苹果是

[1] 埃德蒙德·胡塞尔：《文章与书评（1890—1910）》，第 380 页。
[2] Hua III/1, S.299-304 .
[3] 埃德蒙德·胡塞尔：《文章与书评（1890—1910）》，第 368 页。
[4] Hua III/1, S.297.

红色的”时，素朴直观提供了对苹果和红色的感知，而范畴直观则通过综合这些感知，形成对“是”这一范畴关系的理解。胡塞尔强调，范畴直观的直观性并非来自感性材料本身，而是来自对感性材料的综合和范畴化范畴直观必须建立在奠基性的感知中。在最简单的情况下，不进行奠基性的感性感知，范畴直观就不能被充实。范畴对象与奠基行为的对象有关，如胡塞尔所说，它们具有一种对象性关联。 例如，“A 比 B 大”被奠基于对 A 和 B 的素朴感知中。但这些素朴感知的对象仅仅在将它们置于一种综合关系的范畴直观地被奠基行为中才成为认识的对象。然而，范畴直观并不是它的所有奠基感知的总和，范畴直观的行为的充盈（Fülle）并不完全依赖于 fundierenden（奠基的）充盈。在不同类型的范畴直观中，出现了一些差异。让我们来看看“A 和 B” 这种形式，我们会发现，无论被联结的内容是直观的还是符号化的，实际上的范畴关系“和”总是以相同方式被充实，且不能被进一步增加。另一方面，似乎我们可以通过进一步感知关系元素的充实来增加“书在桌子上”这样的意象的充盈，例如通过同时看和触摸。[1]

在感性感知中，一个个体对象似乎“一下子”呈现出来，当我们的目光落在它上面时，它无需通过奠基与被奠基的行为即可被把握。因此，胡塞尔认为，以感性直观为基础的个体对象以直接的方式存在于我们的意识中。与此相反，范畴对象则通过一系列奠基行为间接地呈现出来，以构造所谓的“高阶”对象。因此，范畴对象并非是像感性直观中的个体对象那样，通过相即的直观立而即显现。二者的区别在于：在感性感知中，这种综合是被动的，对象是立即被给予的，我们无需积极参与特定的构造行为即可把握它；而在数学对象的范畴直观中，这种综合是主动的，我们必须通过奠基行为间接的构造数学范畴对象。

3.5.1 范畴代现的失败问题与四种尝试方案

胡塞尔认为，范畴直观通过范畴代现得以充实。但是他又在《逻辑研究》第二版的前言中明确表示，他不再赞同范畴代现的学说。这一自我批评实际上涉及现象学认识论的核心问题：范畴直观作为现象学的认识论要义是如何可能的。胡塞尔认为一个完整的范畴直观行为必须具备三个要素：（1）质性（2）质料 （3）代现内容（充盈），他同时用立义和立义内容来解释直观行为。[2]这里的立义就是质料赋予，立义内容就是

[1] 迪特·洛玛尔：《胡塞尔的范畴直观概念》张任之译，《中国现象学与哲学评论》2020 年第 2 期，第 229-260 页。
[2] HuaXIX/2, S. A638/$B_2$166.

代现内容，也就是充盈。在胡塞尔关于从感性直观到范畴直观的奠基性定义方式中，可能存在以下情况：（1）相同的内容可以以不同的方式立义，即立义可能发生变化。（2） 在立义方式不变的情况下，内容仍然可能会变化，尤其是在生动性方面。例如，笔者此时正在胡塞尔档案馆，我或远或近，或明或暗，从不同的角度观察桌子上所摆放的胡塞尔的头像雕塑。但是，在范畴直观中，对于形式为“A 和 B”的表达式，无论是直观地还是符号地表示，它们的含义是相同的，其充盈是不可变的，没有增减的可能，尤其是数学对象（如数字、集合、函数）及其关系并不是通过感性经验直接给予的，而是通过范畴性直观被把握的。例如，当我们理解“1+1=2”时，这不仅是对数字“1”和“2”的直观，更是对它们之间关系的综合把握。但对于表达式“胡塞尔的头像雕塑在桌子上”，通过对相关元素进行更多的感知来增加它的充盈，例如同时观察和触摸头像，可能会增加范畴直观本身的充盈。

从胡塞尔的观点看，在范畴行为中不存在（1）中的可变性。这意味着通过范畴行为所引入的新增内容在“和”这样的形式中，对立义而言没有任何变化。范畴代现因此没有了存在的意义。为了解决这个问题，胡塞尔认为在奠基性行为和立义形式的所有变换过程中，对于每个被奠基行为，代现性内容都是单一的。但是毫无疑问，这一观点在每种类型的奠基行为中是难以理解的，同时也忽略了范畴行为中立义与内容的变化。尽管在其他直观过程中可能存在因充盈性而引起明证性的变化，但在范畴直观中，范畴形式始终保持不变，不论在不同判断中使用“是”或“和”均未显示出因充盈而产生的明证性的变化。这种现象使得我们无法确认范畴直观是否存在独立于范畴形式的代现内容，如果缺少可以证明其独立性的代现内容，就难以在认知活动中有效地区分范畴感知与想象；同样，也无法清晰地区分范畴直观与符号行为。[1]因此，胡塞尔承认在范畴直观的代现问题上，他正在事实上面临着“严重的困难”。[2]

如果范畴直观的代现内容不是奠基行为的代现材料，那么它是被奠基行为的符号构型吗？胡塞尔提出了基于“非本真代现者”的第二种解决方案，特别是在符号行为中，符号并不代表意向的对象，而是代表其他对象。如果范畴直观要作为直观，它必须“将经验内容视为所指对象的代现者”。胡塞尔区分了“本真的”和“非本真的被代现者”，它们意味着“直观行为”与“符号行为”所具有的感性材料。[3]胡塞尔确定，符号行为

[1] 陈志远：《胡塞尔范畴代现的理论失败之谜》，《哲学动态》2010 年第 2 期，第 61-69 页。
[2] HuaXIX/2, S. A639/ $B_2$167.
[3] HuaXIX/2, S. A643/$B_2$171.

虽然也需要感性材料，例如被写在纸上的某个字母或被说出的某个音符，但这些感性材料只是随意地、偶然的中介，在“被代现者”与“代现”之间并不存在本质的、必然的联系，因而符号行为所具有的感性材料不是真正意义上的“被代现者”[1]。胡塞尔最终拒绝了非本真代现的观点，因为它们无法提供行为所需的充实。只有通过图像化理解作为类比或通过直观理解作为对象本身来包含对象的行为，才能提供充实。

为了寻找本真代现者，胡塞尔随后给出了范畴充实的第三种方案，奠基的综合行为中的心理联结（psychisches Band）是代现者。因为在范畴行为内部，由于它的独立质料和独立的代现性内容都来自所联结的奠基性行为的质料，范畴行为在没有任何直观行为其奠基的情况下，只能由奠基性行为的质料为其提供心理联系的可能性。心理联结连接的是奠基性行为的本质要素，而非奠基性行为自身的感性直观内容。无论“A 和 B”事态中 A 和 B 变项具体指代者为何物，“和”总是同一个“和”，相应地，综合行为中心理联结也抽象于这类变化之外，从而独立于感性直观的偶然性内容之外。心理联结的概念来自《算术哲学》中“心理关系”。与“物理关系”相对立，心理关系的特征在于在相关内容之间“寻求关系或连接”，它们的连接通过一个统一的心理行为产生，胡塞尔明确地称它们为“心理连接”。[2]然而，在《逻辑研究》中，他进一步超越了明确的“心理内容”表述，并明确将其与“反思内容”相对立。反思性内容意味着“范畴形式”，也是范畴直观的代现内容。因为它不随着内容的偶然变化而变化 ，它连接的不是感性直观的感性内容，而是连接感性直观行为本身。更准确说是奠基性行为的行为特征。同样的感性内容，作为感性代现者在内部感知中（作为反思内容）表示，可以以不同的范畴的方式被理解并且代现范畴形式。[3]

我们需要注意的是，与心理联结解决现代问题的方案不同，胡塞尔在“第六研究”的第八章中，在论述感性直观与范畴直观的关系时，提出了第四种解决方案：现实实行（Aktuellen Vollzug）。Tugendhat 认为，包括心理联结在内的以感性内容为基础的解释方案在范畴层面是不合逻辑的。他坚持认为，正是胡塞尔最后提出的“现实实行”赋予了范畴行为的直观性，并认为这种现实实行仅依赖于“感性决定的”因素，现实实行是范畴直观得以实现的条件。[4]范畴综合的实行只能在感性对象的“实际在场”下才能发生，只有通过范畴行为的实行，才能制造出感性内容，从而在范畴的认识中允

1 HuaXIX/2, S. A647/$B_2$175.
2 Hua XII, S. 69;71.
3 迪特·洛玛尔：《胡塞尔的范畴直观概念》张任之译，2020 年第 2 期，第 229-260 页。
4 Tugendhat, Ernst. *Der Wahrheitsbegriff bei Husserl und Heidegger*. Walter de Gruyter, 1970, pp. 111–136.

许范畴意向的充实。

> 一个范畴直观——一个单纯想象—可以将一个这样的对象性完整适当地置于眼前；换言之，**有关范畴综合以及其他范畴行为可以根据有关的奠基性直观（哪怕是想象）而现实地进行**。[1]

基于胡塞尔的以上分析，Tugendhat坚持认为，感性内容认为正是“现实实行”的基本条件，他将现实实行单纯归结为由“感性决定的”，此外，他还主张即便是逻辑与数学这样的纯粹范畴直观，也必须依赖于某种感性（或在想象中的）质料基础，从而将数学活动强行解释为一种对“质料基础”的构想，这使得数对象在形式化公理体系中的认识论意义变得难以解答。相反，Lohmar认为，虽然现实实行和心理联结是不同的概念，但实际上这两种解决方案是相同的，即仅依赖于基础对象的感性在场，而忽略了奠基行为及其更深层次的结构关系。“现实实行”作为范畴性行为的可能性是直观行为的必要条件，并没有解释直观行为的基础。[2]其次，心理活动的实行是构造范畴性再现的必要条件，也就是“心理联系”的概念。“现实实行”的真正关键在于内在感知，即对奠基行为自身的内在感知，并将其理解为范畴性意向的代现。这一点正是“逻辑研究”第7章中“心理联结”的意义所在。因此，这里的关键并不是“现实实行”，而是对基础行为的内在感知，这是构造范畴性代现的关键所在。因此，与范畴代现一样，现实实行和心理联结并不能解释范畴直观的充实问题。因为胡塞尔明确否定了内感知对范畴直观的作用。他指出，逻辑范畴（如一、多、数、存在、原因等）不能通过内感知产生，因为内感知只能产生感知、判断、肯定或否定等“感性”概念，而非抽象的逻辑范畴。[3]

3.5.2 范畴直观与感性直观之间存在类比论证吗？

从上面胡塞尔对于解决范畴代现的四种尝试性方案我们可以得出，范畴直观的奠基性定义预设了我们将范畴性的代现内容必须等同于感性感知的代现内容，从而解决充实和直观问题。但是我们结合 3.4.2.节关于数学范畴的无对象性及其表象悖论的分析又可以得出，范畴对象的直观与意义的充实之间存在不对称性，意义的外延要大于直

1 HuaXIX/2, S. A662/$B_2$190.
2 Lohmar, Dieter. “Wo lag der Fehler der kategorialen Repräsentation? Zu Sinn und Reichweite einer Selbstkritik Husserls”. *Husserl Studies,* vol. 7, 1990, pp. 179–197.
3 HuaXIX/2, S. A612/$B_2$140.

观的外延，对于数学范畴的无对象的表象悖论，胡塞尔指出我们应该通过含义而关联到对象，而不是通过对象而关联到含义。因此，在范畴直观的第一种奠基性的定义中，范畴代现其实预设了感性直观作为所有直观的模型，将在感性直观领域中得出的直观（或充实）的范例转移到不同类型的本质或范畴对象上。那么除了范畴代现的充实理论及其失败方案，胡塞尔是否合理论证和描述过范畴直观的结构，即范畴直观的合法性问题？

Tugendhat 和 Desanti 都认为，胡塞尔从未描述过范畴直观的结构，他只是展示了其存在的必要性，即我们对形式对象的直观必须基于对感性对象的直观。因此，胡塞尔只是辩证性地论证上范畴直观的必要性，而现象学方法则要求通过反思来揭示意识的具体实现方式 [1]。Pradelle 在进一步的研究中指出，范畴直观实际上缺乏现象学基础，我们当用“范畴充实”这一概念取代范畴直观，范畴意义的充实是对数学概念的意义分析的产物，是公理化过程本身。[2]

在接下来的分析中，我们将以 Pradelle 的范畴充实替代范畴直观的理论作为基础，进一步论证范畴直观的认识论合法性不必依赖于感性直观。同时，我们将深入探讨范畴充实如何通过意向性的相合统一来实现意义的充实，而不需要借助范畴代现、心理联结或现实实行等预设的感性内容的解决方案。同时，范畴直观和感性直观之间并不仅仅存在一种纯粹外在的类比，它们的认识行为方式之间存在相似性。我们可以通过感性直观中对象在视域中的侧显，来对比范畴直观中意义充实链中部分意向性与整体意向性之间的相合关系。最后指出，数学对象的范畴直观并非是对象的绝对给予，而是数学证明和概念分析过程中概念意义层级逐级展开和不断充实。通过数学证明和概念分析，借助部分意向的相合关系，我们逐步解释所蕴含的意义内容。因此，我们并不是从观念意义转向观念对象，后者被认为是与其相对应并充实它的；相反，范畴的充实完全是在意义领域内进行的，而不会超越到对象领域。

3.6 范畴直观的第二种定义：分节行为中相合统一性与范畴充实

在第六研究的第 48 节，胡塞尔分析了在综合的范畴直观中发现的行为层级。胡塞尔认为范畴直观具有 3 个环节：首先，认知的起点是关于对象的简单抓取，即整体感

[1] Desanti, J.-T. “Une phénoménologie des mathématiques est-elle possible ?” in D. Pradelle et F.-D. Sebbah (éd.), Penser avec Desanti, Mauvezin, T.E.R., 2010, pp. 25-27.

[2] Dominique Pradelle, *Intuition et idéalités. Phénoménologie des objets mathématiques*, Paris : Presses Universitaires de France, 2020, pp.464;477;500.

知。在这一阶段，主体对对象进行一种未分化的、直观地把握。例如，当我们看到一座房子时，最初的感知是对房子作为一个整体的直接把握。此时，房子的各个部分（如门、窗等）虽然已经隐含在感知中，但并未被明确地视为独立的对象。这种整体感知是感性的、直观的，尚未涉及对部分的详细分析。胡塞尔认为，这种简单的抓取是认知的基础，但它并不能完全揭示对象的复杂结构。其次，认知的进一步发展依赖于特定的分节行为。在这一阶段，主体通过分节将整体中的某些部分或特征突出出来。例如，从房子的整体感知中，我们可能会特别注意到门的存在。这种分节行为是有动机的，可能由某种特定的兴趣或认知需求驱动。胡塞尔强调，分节行为使得原本隐含的部分变得明确，成为独立的感知对象。这一过程可以是主动的，也可以是被动的（如某些特征“显而易见”地引起注意）。分节行为的动机性体现了认知活动的动态性和目的性，它是从感性直观向范畴性思维过渡的关键环节。最后，认知的完成依赖于真正的范畴性合并。在这一阶段，主体将分节出的部分与整体进行范畴性的综合，形成一种更高层次的认知。例如，我们将门与房子联系起来，理解门作为房子的一部分的功能和意义。在这一过程中，部分和整体之间的关系被明确化，部分获得了“部分”的特征，整体获得了“整体”的特征。胡塞尔认为，这种范畴性合并是通过意向性行为实现的，它超越了简单的感性感知，体现了认知的主动性和创造性。胡塞尔的这一分析揭示了认知活动的基本结构：从整体感知到部分分节，再到范畴性综合。这一过程不仅适用于感性对象的认知，也适用于数学范畴对象和相关的证明过程。[1]

隐含的部分意向与整体感知中的明确意向之间的相合性最终得以确立。胡塞尔也强调了部分意向之间的相合统一作为充实内容。在从整体意向过渡到对独立部分的局部意向时，“整体感知根据那些隐含的部分意向与特殊感知‘相合’。”这种相合统一“现在本身承担了代现性功能”。[2]这样的相合统一也可以仅仅被“体验”，而不必被范畴性地把握强调对意向与意向之间的相合统一的单元进行准确定义，这与它们的充实程度或满足程度无关。不同类型的范畴直观之间的差异。

首先，在素朴感知中，门的蓝色作为整体对象的一部分被隐含地意向，代现内容以非主题化的方式起作用。此时，颜色并未被专门关注，而是作为门的感性特征被直接感知。接着，在明确感知中，蓝色被主题化，成为独立的意向对象，代现内容以明确的方式呈现。这一过渡中，发生了相合综合，即隐含的意向与明确的意向相互吻合。

[1] 迪特·洛玛尔：《胡塞尔的范畴直观概念》张任之译，《中国现象学与哲学评论》2020 年第 2 期，第 229-260 页。
[2] Hua XIX/2, S. A626/$B_2$154.

这种综合不仅揭示了感知行为的内在结构，还为范畴直观提供了代现内容。通过相合综合，“门是蓝色的”这一范畴直观得以实现，其中“是”表达了范畴关系，将感性材料（蓝色）与对象（门）综合为一个范畴对象。

> 只有当我们把感知过程作为一个新行为的基础，只有当我们对个别感知进行分节并将其对象联系起来时，个别感知之间起作用的连续性统一（即通过意向相合的相合）才能作为同一性意识的依据；此时，同一性本身成为对象性的；连接行为特征的相合时刻现在作为代现性内容发挥作用。[1]

胡塞尔认为，“同时持续有效的总体感知根据隐含的部分意向与个别感知相合”，[2]他强调了隐含的部分意向与整体感知中的明确意向之间的相合性必须得以确立。Lohmar认为，我们不能将范畴性（即相合综合）的代现内容等同于感性感知的代现内容（既不涉及对整体的素朴感知，也不涉及对分节行为的明确感知），其次相合综合根本不可能是外感知的感觉内容；最后它也不可能是内感知的内容。[3]我们将在范畴直观的相合综合的基础上，进一步论证数学对象的范畴直观问题。

3.7 数学直观中意向性的相合综合

范畴直观的真正要素并不是所指对象的感性存在，而仅仅是两个针对同一对象的意向之间被动给予的“一致性”或“相合性”（Deckungseinheit）。在数学认识论中，感性不能成为直观的来源。从上一节关于范畴意向之充实的现象学分析可以得出，同一化的综合之运作不依赖于对象特定部分的部分意向的感性充实，它只依赖作为意向的部分意向间的相合性和一致性。[4]而部分意向之间的相合综合在很大程度上独立于表象的对象充实性，因此可以为在数学认识中无对象的数学概念和数学证明提供哲学辩护。[5]这种意向的相合性为理解形式系统中的知识形式提供了新的视角。

在形式系统内的证明过程中，数学概念的分析和数学命题的证明的认识论充实意义是通过意向性之间的相合性实现的。对于一个符号表达式，当我们说“3+2=5”时，这

[1] Hua XIX/2, S. A623/$B_2$151.

[2] Hua XIX/2, S. A626/$B_2$154.

[3] Lohmar, Dieter. “Wo lag der Fehler der kategorialen Repräsentation? Zu Sinn und Reichweite einer Selbstkritik Husserls”. *Husserl Studies,* vol. 7, 1990, pp. 179–197.

[4] Löhmar, Dieter. Phänomenologie der Mathematik: Elemente einer phänomenologischen Aufklärung der mathematischen Erkenntnis nach Husserl. *Phaenomenologica*, vol. 114, Dordrecht, 1989, pp. 47-50.

[5] 迪特·洛玛尔：《胡塞尔的范畴直观概念》张任之译，2020 年第 2 期，第 238 页。

个等式之所以是真的并且具有明见性，是因为在数学认识的活动中，我们从左侧的运算意向（3+2）与结果意向（5）是一致的，两种意向性的相合使得我们可以体验到数学证明的一致性和意向性的充实，从而获得一种数学认识的明见性。胡塞尔认为，在符号数学中存在着数学意向的充实链：

> 在每一类符号意向中都续接地包含着一个确定的充实（或者说，一个确定的充实组），而在这个充实中重又续接地包含着一个确定的充实，如此等等。[1]

即使在纯粹符号性意向之中，充实性的增强也是可能的。我们将从感性对象的侧显与视域的关系出发，继续讨论在数学形式系统中数学证明的意义充实层级的现象学阐释。

3.7.1 从感性对象的侧显到数学对象的层级充实

在感性直观与范畴直观的基础上，胡塞尔分析了感性对象的连续综合与形式对象的分节综合在构造方式上的根本差异。感性对象的构造依赖于一种连续的综合结构，其中对象的统一性是通过连续的多个角度的侧显而显现出来。例如，在感知一个立方体时，其整体性既可以通过近处和远处的不同视角，又可以通过各个面的侧显（Abschattungen）呈现，而每个面在不同光线下又显现出不同的变化。这种综合是一种动态的、连续的过程。我们在 3.3.1 节中已经从质性、质料、代现内容三个方面区分范畴对象与感性对象的不同。形式范畴对象（如逻辑或数学对象）的构造则遵循一种完全不同的综合模式，即不连续的相即综合。在这种模式中，映射、展示和方面等概念不再适用，形式对象的认识具有绝对的一致性而非感知对象的相对一致性。例如，命题“$3 > 2$”或连词“和”并不依赖于侧显来展示其意义；它们的意义是固定的、绝对的。从这个角度而言，形式对象的综合是一种静态的、不连续的过程，其意义和结构并不依赖于感知视域的变化。

为进一步阐明这一点，我们可以提出另一个问题：是否可以对数字 0、1 或 1000 进行独立的范畴直观？答案显然是否定的。每一个数的直观都必然涉及其所属整个算术领域的把握和直观，任何特定的数都包含在它的算术系统或结构视域中（N、Z、Q、R、C）。孤立地把一个对象抽离出来仅仅是一种观念化的抽象。正如在感性感知中，每个具体的感性对象都必然存在于一个共现的外部视域，我们对一个正方体的感知就

[1] Hua XIX/2, S. A543/B$_2$71.

是通过在视域中的各个面的侧显完成统握的。同样，每个范畴对象，包括数学对象在内的直观都是在一个更广泛的视域或意义结构中得以显现。数在不同的数学概念域中的含义是不同的：例如，当我们理解数字“1”时，我们必须同时考虑它作为自然数、整数、有理数、实数等的一部分。在自然数集中的{Ø}（或任何单元集）的基数，在整数集中是 n 与 n+1 的关系，在有理数集中的 a/b 的比率，最后，在实数集中，它是一种戴德金分割或有理数序列的极限或有理数的段。

因此，空间对象总是从感知视域中的侧显开始。这种视域与侧显的部分意向与整体意向的关系也可以用于数学概念的分析和数学证明中递进展开的步骤序列与整体过程。将直观理解为不同于基于感知模式的证明模式，将证明视为在数学视域或系统中不断充实的层级序列和步骤，从而证明数学概念和命题不仅仅是基于句法的推理规则和符号，而且具有认识论意义。但是感性对象是通过在时间和空间中侧显的连续综合来进行的，而形式对象（如数学命题“3>2”或逻辑连接词“和”）的构造无法通过内容的侧显，其意义通过逻辑结构中离散的、分节的综合直接呈现。[1]

3.7.2 数学范畴直观中的意义充实层级与相合综合

前面我们已经分析过，在直观表象中，通过多角度、多方位的侧显的把握，简单给予的对象的充实性是可以通过综合活动逐步增强，但是符号意指的充实性是否是可以逐步增强的呢？[2]胡塞尔在“第六研究”的第 17-21 节中讨论了“间接”表象的意义充实层级，并为这一论点提供了辩护。间接意向的标志是，它们“将其对象作为其他表象的对象或与这些表象的对象相关”来意指。每个间接表象都包含表象的表象。例如：表象 V1(V2(V3(G)))也间接地意指 V1(V2)，它将其对象 G 理解为在它意指的表象 V3 中的对象。如果在符号性充实链中采取了一个步骤，例如空乏地实行了意指 V2(V3(G))，那么至少 V1(V2）可以因此获得充实。[3]对于这种表象的表象，行为的内在感知已经可以作为充实直观。这种完全不同的意向的“交织”充实，构成了这种表达链中充实的特征。

在意向与充实的层次序列中，我们将认识到在每个层次中所蕴含的不同程度

[1] Pradelle 详细分析了感性对象和形式对象之间不同的综合方式，Cf. Pradelle, Dominique. “III. Un ciel sans éternité : la constitution des idéalités catégoriales.” *Monde, structures et objets de pensée. Recherches de phénoménologie en hommage à Jacques English*, edited by Jean-François Lavigne, Hermann, 2016, pp. 87–125.

[2] Hua XIX/2, S. A540/$B_2$68-A550/$B_2$78.

[3] Hua XIX/2, S. A544/$B_2$72.

的间接性。某些意向无法通过简单的充实来实现，而是需要一系列逐步展开的充实过程；在此基础上，我们将逐渐理解“接表象”这一术语最重要、但仍未完全澄清的意义。接着，我将探讨意向与作为充实的逐渐相融的直观体验之间的差异，以及这种体验如何在认识中表现为不同程度的相合性。最终，我们将确定意向与其客观对象之间如何通过充实过程实现完整的相即性。[1]

在此过程中，每个生成物都作为一个过渡环节——意向在此过程中得以充实,但又通过它作为最初的意向对象而指向下一个环节。在其中通过现实化（Aktualisierung）而得到充实，但这又仅仅只是一个过渡（环节），以此类推。[2]

胡塞尔在此强调了意向本身与其充实过程之间的关系，充实并非一蹴而就，而是一个需要分阶段进行的过程，并指出这种关系在认识中是通过不同程度的“相合性”体现出来的。每一个过渡环节对前一个意向提供部分的或暂时的充实，使意向不再空泛，但又不是最终的充实。一个阶段的充实对象，立刻成为下一阶段意向的对象，它是一种链式或层级的充实和推进模式。胡塞尔同时指出，这种充实性具有一定的随意性，因为它依赖于表象链中表象的执行，而不是直接依赖于对象的直观，[3]但这种符号意向的充实模式恰好可以为形式数学中的证明过程进行辩护。“表象的内容——更准确地说，质料——预先规定了一个特定的充实阶段的先验过程”，[4]因此通过对这种充实链中构造性包含的同一性论题的研究，我们可以对数学概念和数学命题进行现象学的解释：

任何一个在一个定义链中自身展开的数学概念的构造都向我们表明充实链的可能性。这些充实链乃是由诸多符号意向一个环节接着一个环节地构造而成。[5]

胡塞尔认为这里是意向性相合的一个特殊情况：序列意向性（Reihen-Intentionalität），在这种情况下序列意向性表现为一种构造物的生成过程，每个构造物都展示出其后继者，都是后继者的“显现”。因此，是显现之显现，显现之（显现之）显现，[6]以

[1] Hua XIX/2, S. A477/$B_2$5.
[2] Hua XIX/2, S. A655/$B_2$183.
[3] Hua XIX/2, S. A546/$B_2$74.
[4] Hua XIX/2, S. A543/$B_2$71.
[5] Hua XIX/2, S. A542/$B_2$70.
[6] Lohmar and Carlo Ierna. “Husserl’s Manuscript A I 35.”*Husserl and Analytic Philosophy*, edited by Guillermo E. Rosado Haddock, De Gruyter, 2016, pp. 289-320.

此分析了我们对于大数概念的认识意向：

$$5^{3^4} \dashrightarrow 5^3 \times 5^3 \times 5^3 \times 5^3 \longrightarrow 5 \times 5 \times 5 \longrightarrow 1+1+1+1+1$$

当我们从 5^{3^4} 转变为 $5^3 \times 5^3 \ 5^3 \times 5^3$ 然后从 5^3 转变为 $5 \times 5 \times 5$，最终从5转变为 $1+1+1+1+1$，每一个步骤都可以看作是一个从被定义项（definiendum）转向定义项（definiens）的过程。胡塞尔认为这里并不存在重新陷入直观（Anschauung）和符号行为（signitiver Akt）或空的意指（leere Bedeutungsintention）的概念混淆。[1]在这个递进和转化过程中，每一次从被定义项到定义项的转化，通过定义项对被定义项进行解释，这个过程出现了新的含义，使得被定义项和定义项之间发生意向性的相合，从而形成同一性的综合。然而我们的目光并没有停留在最初达到的定义项上，而是继续前进"目光穿过它，但并不停留在它上面"[2]。充实在这种情况下便是在一个意向序列的充实链中进行的，亦即奠基的层次序列所延伸的链。[3]同样，每个通过定义对象的解释的层次只是一个过渡步骤或中间项（Zwischenterminus），这个过渡步骤又包含了对概念的进一步澄清和分析的要求。定义者只是一个中间步骤或手段。胡塞尔认为不仅在最终结果（Endresultat）中才真正对应一个充实行为，而且在每一个单独的步骤中也对应着充实行为，这个步骤从一个数的表达导向下一个，澄清并丰富它的内容。[4]在这里，"直观"被赋予了一个新的含义，它不再是感性的，而是通过概念分析的定义行为展开的意义层级的充实行为。[5]

从上面的例子的分析表明，数学范畴的充实具有层级序列的特性，可以具有多个层级，每个阶段都是一个中间环节每个层级都是相对的充实。因此我们可以谈论层级或序列的意向表象和充实。所有这些相对充实的集合构成了无限的充实过程。这里的充实过程是指在概念明证化的每一个阶段都进行的过程，而不是在所有明确化过程结束之后进行的过程。因此，充实过程实际上就是在每一个相对层级上对意义的明证化。

> 我在进行生成活动，并由此构成了一条实践意向性的链条，一条由意向与充实组成的链条，意向性贯通于每一个充实的环节。当意向性穿过当前环节而指向下一环节，并在后者得到充实时并再次穿过，我们不仅仅有直接的贯通，还有在贯通综合中的**意向性之链**（Verketten der Intentionalität）。从一开始，意向性就作

[1] Hua XX/1, S. A105/$B_1$105.
[2] Hua XX/1, S. A106/$B_1$107.
[3] Hua XIX/2, S. A655/$B_2$183.
[4] Hua XIX/2, S. A542/$B_2$70.
[5] Hua XX/1, S. A108/B1270.

为统一体而延展，使得每个充实既是终点又是过渡点，在此情境中，每一个中间环节一方面自有其效力，另一方面又是生成下一个环节的中介，如此往复。[1]

需要注意的是，胡塞尔在这里提出了意向性之链（Verketten der Intentionalität）的概念：一个由意向与充实交替构成的连续的动态生成过程，每个充实的环节既是一个完成的阶段，又为下一个阶段提供了基础，每一个充实环节都在维持并推进意向性。意向性作为统一体延续，使得每个充实环节既是终点，也是下一个环节的过渡点。这种意向性之链也就是胡塞尔在前面分析大数的符号认识过程中提到的序列意向性。根据这种符号认识中的序列意向性，数学的概念领域和公理系统可以看作是一个相对封闭的视域。视域中的层级充实结构就是同一性综合的过程，这里的综合意味着公理前提预设的意义与证明过程的相合性而达到意义的逐级充实。因此，范畴直观不再是关于对象的绝对、直接的给予，而是一个层级序列的意义充实过程，它体现在数学概念的分析和数学命题的证明过程中意向性的逐步相合，从而形成意义的层级序列充实。在这一过程中，范畴的充实完全发生在概念分析或数学证明过程的意义领域内部，而不会超越到对象领域。由此，范畴直观的意向性的相合综合可以解决数学认识中感性内容的代现难题和数学范畴的无对象的表象悖论。

3.8 本质变更的数学应用：以胡塞尔博士论题的变分法为例示

在对数学对象的范畴直观地解释的基础上，我们尝试对本质直观中本质变更的程序方法进行形式化表达，以求解最短时间路径的经典变分函数为例，从初始范例、约束条件、想象变更、变项与常项的方法要素探讨胡塞尔在博士论题中变分（Variation）计算的极值求解与想象变更（Variation）的本质直观在操作方法上的相似性，由此展现胡塞尔自身思想在数学与现象学领域之间的连续性，并进一步阐明数学证明中本质直观的可应用性。

3.8.1 本质变更的方法及其操作条件

不管是在《逻辑研究》中对范畴直观的阐述，还是在《现象学与心理学》里对本质直观的分析，数学对象和数学知识一直是胡塞尔论域里必不可少的部分。在《现象学的心理学》讲座中，胡塞尔规定了本质直观的最终形式，即本质变更，并且指出了

[1] Lohmar and Carlo Ierna. “Husserl’s Manuscript A I 35”, pp. 289-320.

我们已经在数学认识中无意识地运用着本质直观（Wesensschau）的现象学方法：

> 同样地，先天的直观，即观念化（Ideation）的内在行为对我们所有人来说并不陌生，**因为我们都至少学习了一点数学，并在此过程中自主获得了数学的洞见。但我们从未学习过如何观察数学化行为的内在性，并关注其中的普遍性是如何从必然性中产生的。**在这方面，开始是困难的，但很快我们就会变得更熟悉内在性的奇妙世界，并克服了这种陌生、内在的观察所带来的困难。[1]

本质变更要求我们以某个感知或想象的对象作为起始范例（Ausgangsexempel）进行想象中的无限变更而直观实事的本质，[2]即在变更的变项中寻找不变项。其方法操作（Verfahren）需要满足以下几个条件：

a1）　初始范例：我们以“某种被感知到或被想象出来的对象”来开始上述操作，从范例出发去显示变项的开放无穷性。[3]在这里我们用 x 代表基于感知或想象的对象（其中 x∈X，X 是 x 所属的事物类型），并设置起始范例为 x_0。[4]

a2）　想象变更：胡塞尔认为在这一过程中，“自由的想象比感知更有优势”，对诸想象变更的运用是“必然的”，想象是关于“永恒真理”的知识得以汲取营养的源泉，[5]并且想象变更具有无限性和任意性（beliebig）的特征。“在自由的行为中，起作用的是某种与现实性不相干的东西，从某种程度上讲，具有现实性的东西似乎就被安置到自由想象的领域中去了。”[6]在这里我们用 f(n）表示第 n 次想象变更操作函数，其中 n ∈ N（自然数集合）。

a3）　变项：在想象变更中，其中“任何一种被经验到或被想象出来的对象性，其形成物都可以成为变项”，这一变项同时可以用作“起引导作用的前项[Vorbild]”[7]我们在变更内部“从后项过渡到后项，从相似之物过渡到相似之物。”[8]因此，对初始范

[1] Hua IX, S. 87.
[2] 胡塞尔认为这一过程之际，“自由的想象比感知更有优势”，对诸想象变更的运用是“必然的”，参见 Hua III/1, S. 147-148.
[3] Hua IX, S.76-77.
[4] 李忠伟将想象变更的步骤划分为四个模块，并分为三个要素，同时给出了本质变更方法的符号表示。笔者在这里借鉴了第一个模块。参见李忠伟：《本质知识的明证机制：胡塞尔论自由想象中的本质变更》，《社会科学》2021 年第 11 期，第 113-124 页。
[5] Hua III/1, S.147-148.
[6] Hua IX, S.86. 要注意的是胡塞尔在随后的第 b）小节中区分了变更与变项区别于变化与变化阶段（Variation und Veränderung）。与实存性和时间性无关的纯粹可能性，变更是在保持某种本质或结构的同时，可以在形式上出现多种可能性，变更通常是对理念或概念的操作，而变化则是对事物实际状态的描述。
[7] Hua IX, S.76.
[8] Hua IX, S.77.

例 x_0 进行可数无穷多的$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$的想象变更 f(n)，生成一个变项的可数无穷集合 $V = \{x_n \mid x_n = f_n(x_0), n \in N\}$，在这里我们用函数 $g(\{x_n \mid x_n = f_n(x_0), n \in N, d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon\})$ 表示从可数无穷集合 V 中提取共有的相似特征。

a4） 本质常项（Eidos）：不同变项之间会发生交叠。在所有可能变项之间的这种交叠中，我们通过综合统一把握到所有可能变项的不变项的意向：在把诸个别变项贯通起来的过程中出现了一个介于诸个别性之间的“交叠在一起的相合”。[1]我们综合性地把握变项中的统一模式，也就是从变项集合 V 中提取出共有的相似的统一体 $\{X_1, X_2, X_3, ...\}$。然后从统一模式 $\{X_1, X_2, X_3, ...\}$中抽象出单一的、普遍的本质 E，将处于所有变项之中的常项（Invariant）就以直观的方式凸显出。我们用函数 $H(g(\{x_n \mid x_n = f_n(x_0), n \in N, d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon\}))$ 表示这一过程。

a5） 约束条件：变更要与起始范例（Ausgangsexempel）保持相似性。自由的变更受到了“处于模糊概念中的各种前示（Vorzeichnungen）”的约束：“颜色只能在颜色中改变自身，绝不能在声音中（改变自身）。”[2]我们用：$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \varepsilon$ 表示前项与后项之间的相似性关系，其中 x_n 与 x_{n+1} 的差别小于等于一个微小量阈值 ε 以便保持相似性。其次，胡塞尔认为我们必须在某个时刻“终止”所有变更，[3]而 Eidos 的范围就是纯粹概念的范围。[4]即当前项 x_n 与后项 x_{n+1} 的相似性阈值 $d(x_n, x_{n+1}) > \varepsilon$ 或我们已经获得本质 $E = H(g(V))$ 时想象变更的操作就可以终止。事实上，胡塞尔将相似性原理作为变更的约束条件，并未解决概念的边界问题。[5]

因此，从上面的条件我们可以构造出一个用来表示本质变更的简单的函数模型：$E = H(g(\{x_n \mid x_n = f_n(x_0), n \in N, d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon\}))$。这个函数表达式形式化地描述了本质变更的四个步骤：（1）从初始范例 x_0 出发，通过想象变更操作函数 fn 生成变项集合 V。（2）变项集合 V 中的变项需要满足相邻变项之间的相似性阈值ε。（3）通过从变项集合 V 中提取共有的相似性的统一体 {X1, X2, X3, ...}。这一过程用函数 g（V）表示。（4）进一步从相似性的统一体模式中识别出作为同一性的常项本质 E，这一过程用函

[1] Ibid.
[2] Hua IX, S. 75;89.
[3] Hua IX, S. 77.
[4] Hua IX, S. 80.
[5] 洛玛（Lohmar）批评了胡塞尔这里的相似性概念作为变更的约束条件是个含糊的说法，并未解决概念的边界问题，参见洛玛：《本质直观（亦即本质变更）的现象学方法》师庭雄译，《世界哲学》2023 年第 4 期，第 63-79 页。笔者赞同这一点，但在这里只给出相关的符号表达，不在这里详细讨论这个相似性疑难问题。

数 H（g）表示。[1]

3.8.2 求极值的变分方法与本质变更方法的相似性

超越论现象学中通过本质变更获得本质的方法与胡塞尔博士论题里运用变分法求解极值问题具有方法论上的一致性。[2]变分法允许被积函数在约束条件下考虑 y（x）连续微小的变化从而寻找泛函的作为极值的最优解，从而解释自然界中普遍存在的最优化原则，比如在最小作用原理中光线以最短时间路径传播。我们在这里以在胡塞尔博论文中一个相关的经典的变分问题：最速降线问题为例说明二者之间的相似性：最速降线问题作为一个经典的变分问题，首次由约翰·伯努利在 1696 年提出。问题的目标是找到一条从点 A 到点 B 的路径，使得一个质点仅在重力作用下沿该路径从 A 滑到 B 所需的时间最短。这个问题的解决方法涉及到变分法，特别是欧拉-拉格朗日方程的应用。让我们以点 A 和点 B 作为起始点和终点重新概述这个问题的解决过程：

我们首先从起始条件和约束条件开始：在重力作用下，起始点 A 位于坐标（x_A,y_A）。终点 B 位于坐标（x_B,y_B），其中 $y_B < y_A$ 表示 B 点在 A 点的下方。质点在点 A 的初始速度为零。质点从 A 到 B 的下降时间由泛函 T[y] 给出， 其中：

$$T[y] = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(y-y_A)}}\,dx$$

T[y] 表示质点沿着路径 y(x) 从 x_A 到 x_B 的运动时间，y' 是路径 y(x) 的导数。

我们寻找使 T[y] 最小化的函数 y（x），我们假设 y（x）是 T 的极值路径，并考虑路径 y（x）的微小变化，引入变分：

$$y(x)= y(x) + \epsilon\eta(x)$$

其中η（x）在端点 x_A 和 x_B 处为零。

为了找到使 T[y] 取极小值的函数 y(x), 我们对 T[y] 关于 ϵ 求导，并令导数等于零：

[1] 在这里我们只是尝试对本质变更进行较为清晰的符号化的数学处理，以便在后文中与变分法的相似性进行讨论，并不是用数学的精确性彻底消解现象学的严格性。胡塞尔后期认为数学和现象学分别是两种不同知识类型和方法的科学。他在《纯粹现象学和现象学哲学的观念》（第 1 卷）的第 24 节中讨论了数学的精确性与意识科学的严格性之间的区分。

[2] 洛玛讨论了本质变更在数学证明中的作用。参见 Lohmar, D. “ Intuition in Mathematics: On the Function of Eidetic Variation in Mathematical Proofs”. In *Phenomenology and Mathematics*. edited by Mirja Hartimo. Springer, 2010,pp.73–90.

$$\frac{d}{d\epsilon}T[y]\ _{\epsilon=0} = 0$$

这个过程涉及到 T[y] 的泛函导数计算，并利用以下欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

其中，

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y - y_A)}}$$

这里 F 是被积函数，通过替换 y（x）和 y′（x）并计算必要的偏导数，我们就可以将（31）化简为一个关于 y（x）的具体的欧拉-拉格朗日微分方程，解该方程就可以找到使泛函 T[y]取极值的函数：从 A 到点 B 所沿的最速降线路径。这个时间最短的路径就是图 1 中间的旋轮线。

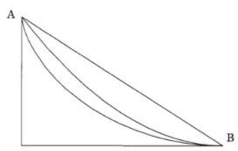


图 1

变分法的目标是寻找使泛函 T[y]达到极值（最大值或最小值）的函数 y（x）。这一过程正是通过考察函数的所有可能微小变化（变分）来完成的。确定了哪些变化会使 T[y]增加或减少之后，就可以确定哪种变化会导向极值，从而选取最优解。变分法（Variation）的这种极值求解与本质变更（Variation）的本质直观在操作程序上具有相似性：

b1） 起始范例与初始近似值：在变分法中，初始近似值通常指的是在开始迭代求解过程之前对解的预估或初步选择。[1]这个初始猜测值提供了求解过程的起点。如果我们采用数值优化方法来求解最速降线问题，就需要提供一个初始猜测值。这个初始

[1] 虽然最速降线问题的传统解法不依赖于初始近似值和迭代求解，但在数值方法中，初始近似值和迭代过程扮演着重要角色。

猜测值是迭代过程的起点，算法会逐步迭代改进这个值，直至满足某种收敛条件，从而找到使下降时间最短的路径。我们可以从物理直觉出发， 选择一条类似抛物线形状的轨迹作为初始近似值。这种形状通常能够较好地满足重力加速度下的最速下降要求，我们也可以根据泛函 T[y] 给出的信息，选择一些特定形式的曲线作为初始近似值，如二次曲线、三次样条等。同样可以通过调整曲线参数，使其尽可能接近真实的解。初始猜测值的设置直接影响到最终解的准确性。好的初始猜测可以加速收敛，减少迭代次数，而不合适的初始猜测可能导致收敛缓慢甚至收敛到错误的解。而在本质变更操作中胡塞尔也设置初始范例 x_0 作为想象变更的基础，通过这种事实基点的引导而通达本质。

b2） 约束条件与概念边界：变分的边界条件定义了变量可以取值的范围或者变量之间必须满足的关系。这里 $y(a)=A,y(b)=B$ 是目标泛函 T[y]的约束条件，质点的路径必须在重力作用下从点 a 开始并在点 b 结束。该约束条件划定了所有可能的极值解的集合空间。同时，不满足边界条件的初始猜测值可能导致求解过程无法进行，或者求得的解不符合实际问题的物理意义。同样，作为本质变更的界限和约束条件，胡塞尔规定了变更中从起始范例（Ausgangsexempel）开始的前项与后项要保持相似性关系，我们前面已经通过 $d(x_n, x_{n+1}) \leq \varepsilon$表达了相似性关系的约束条件。胡塞尔进一步表述了 Eidos 的范围就是纯粹概念的范围，颜色只能在颜色中进行想象变更的本质把握，而绝不能是在声音中变更自身获取本质。[1]

b3） 想象变更与变分函数：变分函数η（x）的变化可以看作是想象变更的运用。对函数 y（x）引入一个小的变化η（x），获得形式为 $y(x)+\epsilon\eta(x)$ 的函数，η（x）意味着各种可能的微小变化，其中ϵ是一个小参数，表明变化的程度。变分函数允许我们“想象”函数 y（x）在各种不同可能路径上的微小偏离，并研究这些偏离如何影响 J 的值，在确定了哪些变化会使 J[y]增加或减少之后,就可以确定哪种变化会导向最大值和最小值。

b4） 变项与函数空间：变分法的函数空间通常是指所有可能使泛函 T[y] 取得极值的函数 y(x) 的集合。它包括无穷多种可能的 y(x) 函数形式：不同斜率的直线、圆弧、各种高阶代数函数曲线等等，允许我们“想象”函数 y（x）从 A 点到 B 点在各种不同可能路径，从一个路径向多个可能的路径“变更”，从而找到使泛函 T[y] 取

[1] Hua IX, S. 75.

极值的最短时间路径。因此，泛函 T[y]是一个函数的函数，它将一个函数映射到一个数。其中函数扮演了“变项”的角色，我们可以在函数空间里选取不同的函数作为泛函的输入。而函数本身实质是将一个数映射到另一个数，自变量 x 是变项，例如前面构造的本质变更的函数表达式 $H(g(\{x_n \mid x_n = f_n(x_0), n \in N, d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon\}))$。

b5） 本质常项与极值解：变分法的目标是寻找使泛函 T[y] 达到极值（最大值或最小值）的函数 y(x)，通过在函数空间中找到一组最优解的函数，将一个函数映射到一个常数上，从而使得某个泛函（如路径长度、作用量等）取到极值。在最速降线的求解中，函数空间 y（x）中的最优解旋轮线是 T[y]取得了最短路径的时间。这与在想象变更中从起始范例开始通过变项中寻找常项的本质变更的方法相似。我们从变项集合 V 中综合性地把握共有的相似的统一体｛X1, X2, X3, ..｝，然后从统一模式｛X1, X2, X3, ..｝中识别作为同一性的本质 E。

因此，变分法是在约束条件下通过变分η（x）的各种可能的微小变化寻找在 y（x）的函数空间中的最优解函数，从而使泛函 J[y]达到极值（最大值或最小值）。而本质变更则是从初始范例开始在约束条件下通过想象变更在变项中寻找不变项而获取本质（Eidos）。前者属于求解极值的最优化认识，后者属于直观本质的同一性认识，二者在操作方法上具有相似性。

3.9 本章小结

我们在胡塞尔早期数学思想中直观构造与形式建构的张力结构的基础上，探究了数学对象的范畴直观问题。首先对经验范畴对象、混合范畴对象及纯粹范畴对象三类本质类型展开分析，对比了总体化、理想化、形式化在内的三种范畴直观模式，指出每一种类型都有其独特的综合充实模式，并不存在一个统一且单一的直观模型。其次讨论了范畴直观的对象直观侧的奠基性定义与意义充实侧的分节相合性的两种定义，阐明了范畴直观与感性直观之间的类比论证问题，指出了感性直观的连续综合与范畴直观的分节综合在行为方式上的相似性和差异。在此基础上，从第二种范畴直观定义出发讨论了以无感性内容、全时性、无对象性作为认识特征的数学对象的范畴直观，提出了数学对象的范畴直观是一种意义充实层级的意向性相合和间接分节综合，并非是对象的绝对给予。并以胡塞尔博士论题中求解极值的变分法研究为例示，比较了变分（Variation）计算的极值求解与想象变更（Variation）的本质直观在操作方法上的相

似性。

关于数学对象的范畴充实的区域本体论研究，改变了我们将直观视为对象直接给予的观念，从根本上摆脱了感性直观和范畴直观之间的类比谬误，从而转向对数学对象的本体论结构及其范畴充实的探讨。在范畴直观中，实际上是“范畴”界定了“直观”，意义优先于“对象”，给予的模式总是依据范畴的本质，意义的充实总是先于对象的直观。如果超越论构造指的是形式对象与使其显现的主体行为之间存在的超越论相关性，那么这种明证性作为给予的方式对于范畴性的观念的意义是什么？超越论的范畴构造理论是否能够解决数学哲学中形式主义与直觉主义的争论？我们将在下一章节进一步尝试解决这一问题。

第 4 章 元数学中直观认识论问题的康德式解读与现象学解释

作为运用逻辑推理和执行逻辑运算的先决条件，我们的表象能力（in der Vorstellung）必须已经拥有某些外在于逻辑的具体对象（außer-logische konkrete Objekte），这些对象作为直观（anschaulich）的先于一切思维活动而被直接体验到。[1]

——希尔伯特

但符号思维是如何“可能的”，客观的数学的和逻辑学的关系如何在主体性中构造起自身，以及如何理解“明见性”，在心理介质中被给予的数学的东西如何可能是一个自在有效的东西，这些都始终还是谜。[2]

——胡塞尔

4.1 引言

希尔伯特在元数学中提出了一种先于逻辑与运算的康德式的几何直观理论，并将这种元数学的直观理论作为形式数学一致性的基础。本章将讨论该理论中笔画符号（stroke-symbols）的直观与笔画符号的后继序列的直观中潜藏的语义指称与潜无穷归纳难题及其引发的批评和回应，并结合当代数学哲学中查尔斯·帕森斯基于胡塞尔现象学提出的构型—类型（toke-type）论的数学直观方案，进一步指明数学形式主义中元数学的直观理论基础与现象学直观（感知与想象）理论的补充性解释。

4.2 希尔伯特纲领中元数学的认识论基础

为了解决集合悖论引发的数学基础问题，希尔伯特一方面反对逻辑主义者弗雷格、戴德金将数学基础建立在集合论等抽象概念的基础上，认为算术基础上已经预设了基

[1] Hilbert, David. “Über das Unendliche.” *Mathematische Annalen*, vol. 95, 1926, pp. 170–171. 相似的段落常常出现在希尔伯特的多处论述中，Cf. Hilbert, David. “Die Grundlagen der Mathematik.” *Die Grundlagen der Mathematik*, 1928, pp. 1-21;Hilbert, David.“Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre.” *Mathematische Annalen*, vol. 104, 1931, pp. 485-486. 亦可参见希尔伯特：“论无限”，收录于贝纳塞拉夫、普特南编，《数学哲学》，朱水林等译，商务印书馆，2003，第 210-232 页。

[2]

本逻辑概念， 而在逻辑法则中同时也蕴含了数和集合等基本算术概念，由此导致了悖论的出现。[1]另一方面他也反对直觉主义者外尔、布劳威尔将数学基础建立于主体意识的 “时间的原初直观”，通过构造性原则拒斥排中律和实无限的存在，限制经典数学的应用。在 1922 年的《数学的新基础》中，希尔伯特提出了一个不同于数学直觉主义与逻辑主义的形式主义的数学奠基纲领，并引入了元数学的概念。他区分了形式化数学和元数学两个层次，并指出重新奠定数学基础需要同时实现形式化与内容性两种证明：

> 第一，所有构成真正数学内容的东西，现在都将被严格形式化，使得真正数学或狭义的数学变成了一个由可证明公式组成的集合[...]。第二，除了这种真正的数学之外，还有一种新的数学，即元数学。元数学的作用是确保前者的安全性，使其免受不必要禁令和悖论的困扰。与真正数学纯粹形式化的推理方式不同，元数学使用内容性推理，且仅用于证明公理体系的无矛盾性。[2]

希尔伯特认为，内容性证明是形式化证明的基础：如命题 “2+2=4”属于形式化证明，而命题“2+2=4 有效”则属于内容性证明。[3]从元数学的内容层扩展到数学形式层的关键是有穷主义证明方法，希尔伯特认为“可证明的公式[...]全都具有有限性质，也就是说，它们所映射的思想可以[...]通过对有限整体的考察而获得”[4]。该方法的前提是将直观概念作为有穷推理的必要条件，而不依赖于对无穷集合的存在性，同时将元数学的内容性证明扩展到我们认识能力的直观范围之外，通过有穷性保证无穷性的确定性，实现复杂或无穷类型的数学命题（如皮亚诺算术的一致性陈述）的证明，[5]从而为数学基础提供一个通过直观对象和有穷证明过程的非循环论证基础。

[1] 尽管希尔伯特在 1917 年左右倾向于罗素的观点，认为公理化研究需要借助《数学原理》中的逻辑方案，但罗素悖论的出现让他随后放弃了逻辑-形式主义的方案。关于希尔伯特纲领早期发展的讨论 Cf. Peckhaus, Volker. *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie: Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie*. Vandenhoeck & Ruprecht, 1990, Göttingen.

[2] Hilbert, David. “Neubegründung der Mathematik, Erste Mitteilung.” *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, vol. 1, 1922, p. 174.

[3] 希尔伯特在 1922 年的《数学的新基础：第一篇》几乎同时引入了“元数学”和“证明论”这两个术语，对希尔伯特而言，“元数学” (Metamathematik,)和“证明论”(Beweistheorie)是同义词。希尔伯特从未解释过为什么要使用两个术语而不是一个术语。

[4] Hilbert, David. “Die logischen Grundlagen der Mathematik.” *Mathematische Annalen*, vol. 88, 1923, p. 154.

[5] Hilbert, David. “Über das Unendliche.” Mathematische Annalen, vol. 95, 1926, p. 190.

4.3 元数学的直观内容与结构

希尔伯特在对元数学的定义中，采用了康德的直观理论，提出了一种先于逻辑与运算的数学直观认识论原则。该原则求基本的数学对象在认识上是直接的、无前提的和不可还原的，既不是弗雷格的抽象的数的概念，也不是康托尔的集合，逻辑推理必须基于对符号及其操作的直观：

> 在认识到必须考虑这些先决条件时，我们发现自己与哲学家们意见一致，特别是与康德[…]。作为使用逻辑推理和执行逻辑运算的先决条件，**我们的表象能力**（in der Vorstellung）**必须已经拥有某些外在于逻辑的具体对象**（außer-logische konkrete Objekte），**这些对象作为直观**（anschaulich）**的先于一切思维活动而被直接体验到**。如果逻辑推理要可靠，就必须能够完全洞察这些对象的各个方面[…]，它们与对象一起被直观地给予，作为一种既不能还原为其他任何某物，也不需要还原的某物。这就是我认为对数学以及所有科学思考、理解和交流都必要的基本哲学立场。根据这一立场，特别是在数学中，我们研究的对象是结构清晰且立即可识别的具体符号自身。[1]

与直观算术的具体对象（一只羊、两只羊……）不同，元数学的直观对象是笔画符号的后继与组合：|、||、||| ……其中，每一个符号操作也是直观的，这种建立在纯粹直观的具体符号基础上的元数学中存在两个层次：

（I）数的笔画符号（Zahlzeichen）层次：I 和+及其后继“……”是元数学的原始直观结构，其形态（Gestalt）不依赖于时间和空间，也不依赖于符号产生的条件及其自身差异，而是可以被认识主体共同识别的通过重复性的递归过程生成一般笔画符号：|+|、|+|+|⋯…根据希尔伯特，这些数的符号本身没有任何意义（Bedeutung），它们不指向任何对象领域，不具有任何意义，它们的属性和关系以及操作都是直接直观的，我们可以对它们进行操作（例如连接）和比较。[2]伯奈斯在希尔伯特的基础上进一步补充了笔画符号的性质，它们不是心理结构，也不是物理现象，它们的存在依赖于我们的直

[1] Hilbert, David. “Über das Unendliche.” *Mathematische Annalen*, vol. 95, 1926, pp. 170–171. 相似的段落常常出现在希尔伯特的多处论述中，Cf. Hilbert, David. “Die Grundlagen der Mathematik.” *Die Grundlagen der Mathematik*, 1928, pp. 1-21;Hilbert, David.“Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre.” *Mathematische Annalen*, vol. 104, 1931, pp. 485-486. 亦可参见希尔伯特：“论无限”，见贝纳塞拉夫、普特南编，《数学哲学》，朱水林等译，商务印书馆，2003，第 210-232 页。

[2] Hilbert, David. “Neubegründung der Mathematik, Erste Mitteilung.” *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, vol. 1, 1922, pp. 162-163.

观能力。[1]

（II）有穷内容算术（Inhaltliche finite Arithmetik）层次：第 II 层次的有穷内容的算术层次是以第 I 层次的笔画符号的具体直观层次作为其对象领域，该层次用数字来表示和描写第 I 层次的对象、事态和关系。[2] 首先用数 2、3 等用作第 I 层次的数的笔画符号的序列组合（如"|+|"、"|+|+|"）的缩写，其次引入表示运算和关系的符号，如+、=等用于陈述和传递第 I 层次符号之间的关系，如相等关系和包含关系。例如 2+3 和 3+2 表示同一个数的符号即|||||，而 3>2 用来表示 " I + I + I"大于"I + I"。[3]

希尔伯特通过第 II 层次在第 I 层次的基础上构建了有穷主义内容算术，我们可以通过直观的对象和操作证明任何一个有穷内容算术中的命题。作为一种直观算术，其对象领域是关于具体直观的笔画符号，它们是先于逻辑与运算的初始符号对象，既不是概念也不是集合，更不需要借助于公理定义，因此不具有逻辑结构和指称意义而产生矛盾和悖论。

4.4 元数学中直观认识理论的康德式解读及其问题

为了深入地理解希尔伯特的公理化思想，有必要分析元数学的直观理论。希尔伯特在元数学的定义中采用了康德的直观（Anschauung）理论，提出了一种先于逻辑与运算的数学直观，他认为数学基础应该依赖于"具体笔画符号的纯粹直观基础"。这种笔画符号是直观给予的直接且具体对象，不涉及任何概念。哥德尔认为这种元数学的直观本质上就是康德意义上的直观形式，且是仅限于有限离散对象构型的具体直观。[4]但是这种元数学的直观认识论问题的哲学辩护在当时受到了新康德主义学派中的尼尔森、穆勒以及现象学传统中贝克尔的批评，批评主要集中于元数学直观理论的问题。（1）元数学的直观认识与康德的先验感性论的关系是什么？（2）元数学中直观认识对象的语义指称问题及其在有穷主义证明中的作用是什么？

4.4.1 元数学中直观认识理论的康德式解读与批判数学

希尔伯特对元数学的定义经常提到康德的直观理论，以及笔画符号作为直接给予

[1] Bernays, Paul. "Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen." *Mathematische Annalen, vol*. 90, 1923, pp. 162-163.

[2] 希尔伯特写到内容算术（inhaltliche Arithmetik），较少提到内容数学（inhaltliche Mathematik）,内容数学与形式数学（formale Mathematik）相对。

[3] Hilbert, David. "Über das Unendliche." *Mathematische Annalen*, vol. 95, 1926, pp.171-172.

[4] Gödel, Kurt. "Über eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes." Dialectica, vol. 12, no. 2, 1958, pp. 280-287.哥德尔关于希尔伯特直观概念的康德解释见英译版: S. Feferman, Solomon, et al., editors. *Collected Works*, Vol. II, Publications. 1990, pp. 1937-1974 中的补充注释。

的直观对象。因此，在分析元数学中直观的认识论地位时，有必要分析希尔伯特的康德哲学立场及其背景。在康德的认识论中，直接性是直观知识的一个定义特征，[1]康德把直观区分为经验直观和纯粹直观两部分，后者是前者的前提条件。经验直观经过感觉与对象直接相关，而先天的空间和时间直观则是经验直观的普遍形式条件，也使得几何学和算术知识成为可能。[2]希尔伯特反对康德将空间和时间形式视为数学基础的必然前提，因为这种观点已经不能适应非欧几何与相对论的发展。他同时也反对布劳威尔基于康德时间直观形式的数学直观主义。在康德的空间直观的前提下，希尔伯特认为元数学的具体笔画符号的纯粹直观可以为数学形式系统的一致性奠定基础。[3]通过与新康德主义—新弗里斯学派的尼尔森（Leonard Nelson）之间的学术交流争论，希尔伯特的助手贝奈斯进一步发展和修正了元数学中笔画符号的纯粹直观理论。

4.4.2 希尔伯特的康德主义立场：从经验直观到纯粹直观

希尔伯特的公理化数学将直观前提的动机和作用限制在元数学中。在 1899 年《几何基础》导论开始，希尔伯特就引用了康德的格言："所有人类知识都始于直观，进而至于概念，最后到达观念。" [4]他认为如果完全去掉直观的内容，数学就会成为一个空洞的形式演算，因此，必须在数学中引入直观和经验的概念进行补充，[5]对直观能力进行逻辑分析：

> 最后，我们可以将我们的任务描述为对我们直观能力（Anschauungvermögen）进行逻辑分析。然而，我们的空间直观是先验的还是经验的起源问题仍然超出了我们的讨论范围。[6]

在 1922 年《数学的新基础》中，希尔伯特提到直观表象时，并没有明确提及康德。他认为在表象中存在先于逻辑的离散对象，它们作为直观的对象被直接体验到。因此，

[1] 康德:《纯粹理性批判(第 2 版)》(康德著作全集第 3 卷)，李秋零译，北京: 中国人民大学出版社，2004 年，第 45 页（B33）。

[2] 康德:《纯粹理性批判(第 2 版)》(康德著作全集第 3 卷)，李秋零译，北京: 中国人民大学出版社，2004 年，第 46 页（B36）。

[3] Hilbert, David. "Über das Unendliche." Mathematische Annalen, vol. 95, 1926, pp.171-172.

[4] Hilbert, D. *Grundlagen der Geometri*e. B.G. Teubner, 1899, p. 1.

[5] Hilbert, D. *Natur und mathematisches Erkennen, Vorlesungen, gehalten 1919-1920 in Göttingen*, Nach der Ausarbeitung von Paul Bernays, edited by David E. Rowe, Birkhäuser Verlag, 1992, p. 51.

[6] 这段未发表的手稿文字引自 Corry, Leo. "Axiomatics, Empiricism, and Anschauung in Hilbert's Conception of Geometry: Between Arithmetic and General Relativity." *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*, edited by José Ferreirós Domínguez and Jeremy Gray, Oxford University Press, 2006, p. 151.

这种哲学立场的数论研究以具体符号的纯粹直观为基础。[1]在 1926 年的《论无穷》中，希尔伯特几乎完全重复了之前与对象直接相关的表象论述，但是将“外在于逻辑的离散对象”（außer-logische conkrete Objekte）表述发展为了“外在于逻辑的具体对象”（außer-logische konkrete Objekte），并且明确地将康德哲学中数学对象先于逻辑而存在的观点作为有穷证明论的立场，但没有进一步对元数学的直观性质进行先验分析，[2]此后他将先于逻辑运算与操作的直观前提视为一切科学思维的可能性。[3]在与助手贝奈斯的后期合作中，希尔伯特开始明确地诉诸康德的纯粹直观概念：“必须将某种形式的纯粹直观认识作为数学的出发点”。[4] 到了 1931 年，希尔伯特正式地将康德的先天直观条件作为了有穷论的思维方法：

> 仔细思考，我们发现除了经验和思维之外，还有第三种认识的来源。虽然我们现在还不能完全同意康德的每一个具体观点，但是康德认识论的最根本思想仍然具有重要意义：那就是确定的先天的直观的思维方式，是探究一切知识可能性的条件。我认为，这就是我对数学原理的研究本质上所做的工作。这里的先天并不是别的什么，仅仅是一种基本的思维方式，我也可以称之为有穷的思维方式：它们已经在先的通过表象以某种方式被给予我们：某些非逻辑的具体对象，它们作为直接的体验在所有思维之前以直观的方式而存在。[5]

与康德一样，希尔伯特试图通过反思数学知识的可能性，确定直观的先天的思维方式，从而为数学真理的确定性奠定基础，使得数学知识不仅依赖于逻辑结构和概念定义而是建立在某种直观的洞察（anschaulicher Einsicht）的基础上。[6]他认为根据康德的观点，除了逻辑和经验之外，构成我们知识基础的还有先天知识，这种知识通过对数字笔画符号的纯粹直观获得。这种直观虽然基于经验认识的笔画符号对象，但是却具有纯粹直观的性质，因为它不依赖于符号的具体形状，而是依赖于符号自身的普遍性和主体间认识的客观性，数学知识以这种数学直观为前提。

从上面的分析可以看出，希尔伯特元数学的直观定义经历了从感性经验直观到纯

[1] Hilbert, 1922, pp. 162-63.
[2] Hilbert, 1926, pp. 170-71.
[3] Hilbert, 1928, pp. 1-21.
[4] Bernays, P. “Die Grundgedanken der Fries’schen Philosophie in ihrem Verhältnis zum heutigen Stand der Wissenschaft.” *Abhandlungen der Fries’schen Schule*, vol. 5, 1930, p. 109.
[5] Hilbert, D. “Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre.” *Mathematische Annalen*, vol. 104, 1931, pp. 485-486.
[6] Hilbert, D. “Wissen und mathematisches Denken.” WS 1922/23, Ausgearbeitet von W. Ackerman, Mathematisches Institut Universität Göttingen, 1988.

粹先天直观的康德式转变。[1]他早期的论述中涉及的是具体笔画符号的内容直观，是一种经验性的直观，而这种经验直观后期则转变成为基于康德先天观念的对笔画符号进行普遍性和客观性的纯粹直观。这种转变发生的原因在于，希尔伯特在几何基础研究的早期以及对自然科学的关注，他对直观的理解主要集中在空间的经验直观上，几何学公理的选择和使用与具体的空间直观密切相关。这种直观不仅为几何学提供了基础，还在一定程度上决定了公理系统的构建，使他在认识论层面上强调对具体对象的笔画符号的感知经验，而另一方面，随着几何公理化的进程，几何的一致性问题被映射还原为算术的一致性问题，经验直观的具体空间成为通过公理定义的概念实体，而非严格的几何对象。经验直观也被重新定义为一种纯粹直观，这种纯粹直观不是基于空间的具体经验，而是基于数学的形式结构与笔画符号。希尔伯特由此强调这种纯粹直观在算术层面上与先天直观的联系。[2]在这个过程中，希尔伯特实际上遇到的一个重要困难是：如何在形式化与直观之间建立联系？在康德关于几何学基础中起作用的“直观”原则在希尔伯特的数学公理化过程中并没有逐渐被概念实体的“逻辑推论”所取代。相反，这个问题成为希尔伯特纲领中如何运用元数学的纯粹直观理论证明形式系统一致性的奠基性问题。

4.5 元数学中直观对象的笔画符号问题：穆勒的批评与贝奈斯的回应

希尔伯特认为形式系统的一致性应该奠基于元数学的“具体笔画符号的纯粹直观基础”，其中笔画符号作为直观认识的对象是无逻辑结构和概念指称意义的，因此不会产生悖论。穆勒（Aloys Müller）在 1923 年写了一篇名为“论作为符号的数”的文章，批评希尔伯特在“数学的新基础”中的这种观点。[3]他认为元数学的这种直观对象理论存在一个认识论的矛盾：希尔伯特一方面认为笔画符号是康德意义上可纯粹直观的具体对象；而另一方面又认为这种具体的可直观的笔画符号是没有意义的。[4]穆勒从三个方面批判了希尔伯特将数视为无意义的笔画符号的观点，希尔伯特的助手贝奈斯

[1] 曼科苏指出了这方面的转变，Cf.“Hilbert and Bernays on Metamathematics.” In Mancosu, Paolo, editor. *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford University Press, 1998, pp. 149-188.

[2] Corry, Leo. “Axiomatics, empiricism, and Anschauung in Hilbert's conception of geometry: Between arithmetic and general relativity. ” In José Ferreirós Domínguez & Jeremy Gray (eds.), *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*. Oxford University Press, 2006, pp. 133-156.

[3] Müller, Aloys. “Über Zahlen als Zeichen.” Mathematische Annalen, vol. 90, 1923, pp. 153-158.反驳了希尔伯特的观点，随后希尔伯特的助手伯纳斯发表了一篇回应文章，捍卫了希尔伯特的立场：Bernays, Paul. “Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen.” *Mathematische Annalen*, vol. 90, 1923, pp. 159-163. Müller 做了进一步的回应：Müller, Aloys, and Paul Bernays. “Über den Gegenstandscharakter der Zahlen.” *Annalen der Philosophie und Philosophischen Kritik*, vol. 4, no. 9, 1924, pp. 485-512.

[4] Eder, Gabriel. “The Bernays-Müller Debate.” HOPOS: *The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science*, vol. 13, no. 2, 2023, pp. 317-361.

回应反驳了这些意见，并修正了元数学的直观理论的对象定义问题。

（1）希尔伯特将“|”和“+”视为无意义的符号，而数“2”“3”等则用来表示这些符号的组合。穆勒认为如果数的符号没有意义，那它们就不是符号，而只是符号“构型”（Gestalten），而数不能等同于笔画符号的构型。穆勒反对希尔伯特使用“Zeichen”（符号）一词来表示无意义的符号。因为符号是某物的符号（Zeichen-Bezeichnetes），数的符号必然也应该指称某些对象，这是数学对象理论的根本问题。因此“单纯的笔画符号不足以作为数论的基础”。[1]因为由于数的笔画符号没有意义，而且仅仅用数的构形来构造数，那么，任何形式的笔画符号都可以互换，可以用各种各样的形态来代替数，从而得出各种各样的结果，例如，“I+I”可以用“◦ • ◦”的排列替代表示。穆勒认为，即使约定特定构型来代表数字，也无法改变构型本身没有意义的事实，实际上我们已经习惯了数的笔画符号并赋予它们意义，在数的笔画符号的形式排列和构造中，已经预设了经验中的内容和意义，这才使得希尔伯特能够使用它们， 而没有给出充分的解释。贝奈斯拒绝穆勒认为数的符号必须与意义关联的意见，但是同意穆勒“仅仅构型不足以作为数论的基础”的观点。为了避免歧义，希尔伯特和伯奈斯开始使用“数的构型”（Ziffer）来替代“数的符号”（Zahlen）以强调数字本身并不携带任何附加的意义。贝奈斯认为无意义的笔画符号并不是构成基础，而只是充当有穷内容算术层次的对象。 他承认，特殊的形态“I”和“+”并不是本质的，可以选择其他符号，如点、星号、竖线等，甚至可以用时间序列来代替空间序列，笔画符号的本质在于它们构成的序列结构，而不在于符号本身的具体构型。贝奈斯强调笔画符号既不是物理对象，也不是纯粹的思维构造，而是依赖于直观。数的构型序列并不是物理意义上的对象，初等数论的真理并不依赖于外部物理事实的可能性（例如，能写下什么样的笔画符号），否则并排放置的两块石头就可以算作与 I I 相同类型的笔画符号序列；同时这些笔画符号也并非我在 t 时刻的心理产物，这样数的客观性会导致心理主义的怀疑论。贝奈斯进一步补充了希尔伯特的康德主张：

> 根据希尔伯特的观点，直观数论的对象，即数的笔画符号，也不是“由思维创造的”。但这并不意味着它们独立于直观构造而存在，用康德的术语，这里非常合适。[2]

（2）贝奈斯认为，相对于符号自身的具体构型，将相同的笔画符号以相同的排列

[1] Müller, 1923, p. 157.
[2] Bernays, 1923, pp.162-163.

方式组合（Zusammensetzun）才是最重要的。穆勒反驳了这一观点，他认为为什么只有由 I 开头、以 I 结尾，中间 I 和+交替出现的构型才能被视为数呢？如果 I 和+只是无意义的构型，那么它们的形式、组合方式和数量都可以任意变化，没有限制，任何其他样式的构型规定同样成立，但这与数的客观性认识相矛盾，无法建立数论体系。因为数的特征是确定的，不可任意改变，如果坚持某种组合的必要性，就会超出这些事物仅仅是形态的局限，而再次赋予这种特定组合某种意义：I + I + I + I 这种排列形式，容易使人们想到这是一个数列，数列中各项的位置，从而不自觉地赋予了它们某种含义。[1]然而，伯奈斯强调，构型理论可以被视为直观数论的一部分，虽然形态和排列的非本质元素可以忽略，但组合方式的特定形式是必要的，相同的构型必须以相同的方式组合。这意味着我们仍然受限于特定的组合形式，即“字符串行式”（Reihenform der Zusammensetzung），但这种组合形式并没有赋予符号任何意义，而仅仅是对符号的纯粹外部关系的描述。

（3）在第三个反对意见中，穆勒针对希尔伯特关于数的比较关系的解释提出质疑。他认为，根据希尔伯特的解释：“3 > 2”意味着“ I + I + I”大于“I + I”，或者说后者是前者的一个子集。但当我们把两个数的笔画符号垂直排列时：

I + I

I + I + I

第二个数并没有大于第一个符号，第一个数的笔画符号也不是第二个数的笔画符号的一部分。因此，根据这种空间解释，“3 > 2”并不总是成立。并且如果我们否认这一点，就是在这些笔画符号中在先赋予了一些意义，例如，我们认为第一个形态包含两个单位，比第二个少一个单位。伯奈斯回应说，根据希尔伯特的解释，“3 > 2”确实具有空间意义，但不具有度量意义。希尔伯特强调在直观数论中，应该忽略构型构造中的微小差异。“I + I”的元素间的距离大小是一个微不足道的差异，这种差异并不会改变数字 “2”始终完全由“I”“+”和另一个“I ”构成，数字“3”对应地由“I + I + I”构成。 伯奈斯进一步解释说，构型“I + I”与构型“I + I + I” 的关系仅仅是一个纯粹的外部关系，构型“I + I”作为构型“I + I + I”的一个部分，可以直观地理解为在前者的基础上附加“+ I”。 这种观察并不会暗含地赋予这些符号某种意义。实际上，这只是关于符号之间的外部关系的问题，不涉及它们的内在意义。数（Anzahl）概念的内容特征与数的纯粹构型特征相兼容。这些构型被用作计数的工具，通过计数

[1] Müller, Aloys, and Paul Bernays. “Über den Gegenstandscharakter der Zahlen.” , 1924, pp. 485-512.

确定数（Anzahlbestimmung）。

4.6 从希尔伯特的元数学到尼尔森的批判数学

在 1927 年哥廷根举行的“批判哲学与数学公理化”讲座中，[1]新康德主义者尼尔森指出，希尔伯特提出的公理化方法与“批判数学”存在本质上的内在关系。公理系统的演绎构建不仅仅是形式逻辑层面的探讨，而是建立在纯粹直观基础之上的数学认识论问题。因为，一方面，形式系统的一致性证明需要对数学公理之间的逻辑关系进行系统表述；另一方面，公理的起源和有效性则需要通过纯粹直观来批判性证明。[2]这种与希尔伯特元数学相对应的尼尔森的批判数学概念首先由数学家格哈德·海森伯格（Gerhard Hessenberg）[3]提出，尼尔森在此基础上开始复兴新康德主义弗里斯（Jakob Friedrich Fries）的数学批判理论，[4]将数学公理视为建立在纯粹直观之上的先验综合判断，[5]目的是对数学公理进行批判性的基础研究。这种批判数学很快成为希尔伯特周围数学家和哲学家的结合点，希尔伯特认为，这正是具有数学背景的哲学家胡塞尔和尼尔森出现在哥廷根的原因，哥廷根的文化任务是要成为数学一哲学中心。[6]他的学生理查德·柯朗（Richard Courant）记录了哥廷根数学家和哲学家之间关于批判数学的合作。[7]

希尔伯特的助手贝奈斯和学生柯朗一致反对尼尔森将公理系统建立在纯粹直观基础上而作为真理系统的主张。柯朗认为“数学真理有效性的概念应该被限制在元数学中”。[8] 贝奈斯虽然同意尼尔森关于数学中纯粹直观作用的观点，但他也同样强烈反对

[1] Nelson, Leonard. “Kritische Philosophie und Mathematische Axiomatik.” *Beilage zu Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, vol. 34, no. 4, 1928, pp. 1-14.

[2] Nelson, Leonard. *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik*. Meiner, 1959, p. 122.

[3] 1904 年，数学家格哈德·海森伯格（Gerhard Hessenberg）发表了名为《论批判数学》的文章，参见 *Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft* 3. pp.21-28.

[4] 莱昂纳德·纳尔逊在 1904 年至 1927 年活跃于哥廷根，倡导“作为科学的哲学”，他复兴了雅各布·弗里斯的学说，并创立了“新弗里斯学派”，伯奈斯是联合创始人之一，其中成员有哲学家鲁道夫·奥托 (Rudolf Otto) (1869-1937)，数学家格哈德·赫森伯格 (Gerhard Hessenberg) (1874-1925)以及生物化学家奥托·迈尔霍夫 (Otto Meyerhof) (1884-1951)。1917 年，希尔伯特以支持成员身份加入该协会，随后他的学生数学家理查德·库朗特 (Richard Courant) 、波恩也加入了该学派的交流活动。纳尔逊的文集由贝奈斯在 1970-1977 期间整理出版。

[5] Nelson, 1959, p.386.

[6] 关于希尔伯特关于胡塞尔、尼尔森的书信交流可参见 Da Silva, João, and Craig Hill. *The Road Not Taken: On Husserl's Philosophy of Logic and Mathematics*. College Publications, 2013, pp. 384-394.希尔伯特为两人能够在哥廷根获得稳定教职而做了诸多努力。

[7] Courant, Richard. “Reminiscences from Hilbert's Göttingen.” *Math Intelligencer*, vol.3, no.4,1981, pp. 154–164. Peckhaus 分析研究了希尔伯特所建立的这种数学与哲学之间跨学科合作交流的哥廷根模式，参见 Peckhaus, V. (1990). *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*. Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie.

[8] Nelson, 1928, p. 8.

尼尔斯超越元数学而将数学公理建立在康德的空间和时间纯直观上的想法。[1]他认为，如果我们可以仅仅依靠对时空的先天直观为基础，那么提出公理系统的一致性问题就毫无意义，而且根据希尔伯特纲领，纯粹直观只能运用于元数学，因此必须对元数学中具体笔画符号及其组合操作的直观模式进行修改，保留其先天性与直接性的特征，放弃康德关于先天综合判断的数学知识是基于空间与时间的感性纯形式的基本观点。尼尔森认为，贝奈斯承认元数学的纯粹直观实质就是一种先天给予的空间直观：

> 那些否认数学公理的认识论性质的人，就是在否认纯粹直观作为数学判断的认识论来源的存在。在元数学中，我们不能没有直观，正如贝奈斯在讨论中明确承认的那样。但是，这里涉及的是什么样的直观呢？元数学中考虑的笔画符号序列是扩展实体，事实上是在空间序顺序中给予的空间扩展实体。元数学所依赖的直观就是空间直观。[2]

尼尔森指出，元数学的空间直观要么是经验的感性直观，要么是先天的纯粹直观。在第一种情况下，如果元数学直观理论是某种经验直观，我们的直观对象是写在纸上的字或者黑板上粉笔痕迹的感知，那么元数学的直观理论就会成为一种“粉笔的形而上学”。[3]因为笔画符号的物理感知无法解释数的客观性问题。因此，在第二种情况下，贝奈斯必须承认元数学依赖于空间的先天直观的有效性，因为元数学的直观对象是在空间顺序中给出的具有普遍性的笔画符号序列，这种先天有效性是构造数学知识可能性的基础。

贝奈斯接受了尼尔森在元数学范围内纯粹直观的先天空间解释，但是继续反对时间直观形式在数学基础中的作用，并且认为我们可以将希尔伯特的元数学基础上的有穷主义证明方法与尼尔森的批判数学结合起来，以新的形式发展康德关于知识可能性的新理性批判：

> 还有另一个观点可以把希尔伯特对数学的基础与尼尔森的哲学联系起来：希尔伯特作为方法论基础要求的“有穷主义态度”必须从认识论的角度被界定为一种纯粹直观的形式。因为这种“有穷主义态度”一方面是直观的，另一方面又超越了实际经验的范围。这种认识论基础的要求本身就独立于希尔伯特方法的具体

[1] Nelson, 1959, p. 110.
[2] Nelson, 1928, p. 12.
[3] Nelson, 1959, p. 118.

形式；它适用于任何有穷数学的基础。然而，希尔伯特基础的特点是，这里的有穷主义立场与理论科学的公理化基础相结合。通过这种方式， 希尔伯特基础的一个特点是这里的有穷观点与理论科学的公理基础相关联。因此，有穷态度的条件就作为理论知识可能性的条件出现。这完全符合康德对该问题的表述。一旦这种联系被普遍认识到，就会给出这样的可能性，即康德《纯粹理性批判》的基本思想将在新的形式中复兴，脱离其时间依赖的特殊形式，而这些形式所束缚的理论科学也已经摆脱束缚。[1]

贝奈斯认为希尔伯特要求的有穷主义证明方法必须从认识论角度被界定为一种纯粹直观的形式。因为希尔伯特的有穷主义态度不仅是直观的，而且超越了实际经验的范围，可以与理论科学的公理基础相关联，成为任何有穷数学的方法基础与相关的理论自然知识可能性的条件。这种观点与康德对该问题的表述相一致，我们就有可能以新的形式重现康德理性批判中知识何以可能的基本思想，脱离时间直观形式的先天性限制，使其更适合于现代科学和数学的发展。

因此，从上面的讨论我们可以看出，尼尔森接受了贝奈斯的批评，保留了纯粹直观的元数学界限，进一步论证了元数学的纯粹直观是康德的先天空间直观，贝奈斯同意元数学的笔画符号的纯粹直观的空间解释，但是他对这种元数学中直观认识对象的笔画符号问题和争论在希尔伯特的基础上进行了进一步的讨论和修正。

4.7 元数学证明中笔画符号序列的归纳推理难题与贝克尔的批评

在希尔伯特纲领中，形式系统一致性证明本身只能使用元数学直观理论的有穷主义的方法进行证明。希尔伯特认为布劳威尔关于潜无限的预设是不必要的。因为一方面超限的内容（包括潜无限）可以通过有穷主义方法进行推理证明。另一方面，将直观内容扩展到有穷范围之外会引起不确定性。为了避免悖论与循环论证，元数学不依赖于对无穷或不可验证对象的假设而只处理有穷对象和过程，而有穷证明过程依赖归纳原理：

[1] Bernays, Paul. “Über Nelsons Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik.” *Die Naturwissenschaften*, vol. 16, no. 9, 1928, pp. 142-145.

> 庞加莱曾在不同的地方做出了一些与我的观点相反的论述，特别是他从一开始就否定了证明算术公理一致性的可能性，因为他声称，完全归纳法的一致性只能通过归纳法本身来证明。但正如我的理论所表明的那样。在算术的基础中，有两种归纳方法是相关的，即一方面是通过数的笔画符号构造整数的直观方法，也包括这样的逆向操作，拆解现有数的笔画符号或相似于数的笔画符号构造的具体图形—这就是内容归纳（inhaltliche Induktion）；另一方面是基于归纳公理的形式归纳（formale Induktion），只有通过这种方法，数学变量才能在形式系统中发挥作用。[1]

庞加莱（Poincaré）认为元数学中蕴含了归纳法与整数的循环论证。希尔伯特在使用归纳法进行元数学的证明时，I 作为一个笔画符号是无意义的，但当我们谈到“用这个笔画符号组合形成的序列，重复两次、三次或多次……”时，我们引入了“两次”“三次”这些词，尤其是“多次”，那么我们实际上已经引入了数的概念，然后在此基础上得到了有限序数的定义。元数学中用归纳法证明有限序数的定义不包含矛盾，但归纳法的本身的证明又依赖于有限序数的定义。证明的前提依赖于尚未证明的结论的这种逻辑循环导致了元数学证明的无效性。[2]但是希尔伯特认为首先在元数学层次上所需的归纳法要比完全归纳法弱得多，这种弱的形式的内容归纳是基于有穷具体的笔画符号，这种元数学基础层的直观不需要进一步的论证或还原。

现象学传统中的贝克尔在其著作《数学实存》中进一步发展了庞加莱对元数学中笔画符号序列的直观推理的反对意见。根据希尔伯特，每个数的笔画符号都可以通过直观地操作“|”和“+”的操作实现，当我们推理关于有穷的任意数 A（n）的笔画符号：|、||、|||、 |...|，其中‘.’代表 n 个有限不确定数的笔画符号。我们在元数学中考虑命题 A（n）的有穷可直观的句子 A(0)、A(1)、A（2）的笔画符号：|、||、|||，那么我们只能直观地归纳到这个特定序列具有的性质。但是贝克尔认为尽管希尔伯特承认我们可以对任意复杂和一定数量的有限对象进行推理，但没有明确设置一个上界 n=a，使得我们将有穷直观限制在不超过 a 个笔画符号的对象。因此，从这个层面来看，元数学中已经预设了潜无限的存在。尽管在具体操作中处理的是有限的、确定的对象，而不是无穷对象。因为潜无穷的存在，贝克尔指出， 要断言形如（n）A（n）的一致

[1] Poincaré, Henri. “Les Mathématiques et la Logique.” *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 14, 1906, pp. 25-42.其实，斯科伦也指出了希尔波特的元数学依赖于整数与归纳法的循环定义，Cf. Skolem, Thoralf. “Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik.” *Den Syvende Skandinav. Matematikerkongr*, 1929, pp. 3-21.

[2] Hilbert, 1928, p.12.

性命题，需要使用完全归纳法，[1]但是如果我们假定"|...|"包含有穷个符号构形：|、||、|||，那么我们无法看出归纳法对任意一个笔画符号都成立，也就无法推广到数论中的所有数。另一方面，如果我们假设"|...|"所包含的不是某个特定的笔画符号数，而是任意的，这种情况下我们又不能直观"|...|"中所有的笔画符号序列的内部结构，无法知道归纳法是否对它成立。因此，我们可以得出结论，如果元数学的直观理论是基于有限的具体笔画符号对象，那么我们通过归纳法所获得的数学知识就不是基于这种数学直观的。

因为归纳难题的提出，希尔伯特和贝奈斯允许在元理论中使用自然数的归纳法，根岑（Gentzen）通过使用无量词的超穷归纳法（transfinite Induktion）证明了算术的一致性，[2]但是这种方法并非在希尔伯特的意义上有穷论证明论[3]，该推理涉及到康托的第二类序数。外尔认为直观可靠性的界限已经变得模糊。[4]冯·诺伊曼等认为可以将希尔伯特的元数学与布劳威尔的数学直觉主义等同使用：

> 在这里，人们必须始终清楚地区分两种不同形式的"证明"，即形式系统内的形式化（数学）证明和关于系统的内容（元数学）证明。前者是任意定义的逻辑游戏，后者是一系列直接明显的内容直观。因此，这种"内容证明"必须按照布劳威尔和外尔的直觉主义逻辑进行。证明论应该在直觉主义的基础上构建经典数学，通过这种方式消除直觉主义的悖论。[5]

贝奈斯在发展希尔伯特纲领的过程中也将希尔伯特的有穷主义证明与数学直觉主义的方法等同起来，[6]但他后来认为直觉主义在发展过程中已经通过拒绝经典数学里排中律的使用而与希尔伯特纲领完全不同。[7]

4.8 元数学的现象学解释方案：帕森斯的类型-构型论的数学直观

从前面穆勒和贝克尔的批评可以看出，希尔伯特元数学中笔画符号的纯粹直观理

[1] ME, S.485-494.贝克对希尔伯特有穷主义的批评出现在 ME 的第 83 节。
[2] Gentzen, G. "The Consistency of Pure Number Theory." *Mathematische Annalen*, vol. 112, 1936, pp. 493-565.
[3] 在谈及希尔伯特的元数学相关的有穷主义数学（finitistische Mathematik）时，我们按照固定的翻译，不使用"有限"一词进行表述。同样，对应的"超穷归纳法"一词也不用"超限"表述，只有在康托尔的意义上使用"超限"（transfinite）一词。
[4] Weyl, H. Levels of Infinity: Selected Writings on Mathematics and Philosophy. *Dover Publications*, 2012, p. 281.
[5] Von Neumann, J. "Zur Hilbertschen Beweistheorie." *Mathematische Zeitschrift*, vol. 26, 1927, pp. 2-3.
[6] Bernays, 1930, pp. 251-253.
[7] 关于布劳威尔的直觉主义与希尔伯特有穷论一致性的讨论可见"Hilbert and Bernays on Metamathematics." In Mancosu, Paolo, editor. *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford University Press, 1998, , pp. 167-168.

论的康德式解读主要存在两个问题（1）数与笔画符号的同一性引起的语义指称问题，（2）数的笔画符号及其序列的无限性引起的归纳问题。帕森斯在当代数学哲学的语境中认为，对布劳威尔和希尔伯特而言，康德的直观概念是数学知识不可或缺的来源。[1]他尝试在康德传统中结合现象学的直观理论，发展一种数学对象的直观理论。[2]一方面借助胡塞尔现象学中感知与想象的直观理论，扩展了希尔伯特元数学的直观概念，另一方面从感性直观与范畴直观的奠基关系出发，提出了一种基于希尔伯特笔画符号直观的类型—构形论（toke-type）数学直观方案。

4.8.1 笔画符号的同一性问题：类型-构型论的数学直观方案

帕森斯认为，自然数（0,1,2 等）是纯粹对象的例子，它们是完全抽象的，不存在于物理世界中，我们无法直观任何自然数，但用墨水写在纸上的数的笔画符号：|、||、||||是与我们的感官之间存在明显的因果关系。我们通过这些具体对象的代现获得相应的数的概念的类型知识。帕森斯将希尔伯特的元数学直观理论中具体有限的笔画符号称之为字符串（stroke string），并将这种先于推理而外在于逻辑的具体对象（außer-logische konkrete Objekte）称之为拟具体对象（quasi-concrete object）：

> 拟具体对象的正式解释如下：一些抽象对象的特点在于它们与具体事物有内在联系；它们由其具体的代现（representation）所决定。我将这种对象称为拟具体对象。[…] 使对象成为拟具体的原因在于，它是一种与内在的、具体的‘表示’相关的类型，这种类型的不同对象通过拥有不同的代现在区分。[3]

通过区分纯粹数学对象和类具体对象，帕森斯用符号类型（toke-type）解释替代希尔伯特的笔画符号（stroke-symbols），[4]类型代表一种概念或抽象知识，比如“四根竖线组成的符号”，而构型（token）代表一个具体实例，比如“||||”就是一个“四根竖线组成的符号”的具体例子。符号类型是“准具体的”抽象对象，它们由具体对象的符号构形的固有关系确定。一个类型是什么，取决于它的构型是什么。他认为根据现象学的观点，这种符号类型的直观奠基于具体笔画符号的感知直观，类型在被感知的构型中得以直观。

[1] Parsons, C.“Intuition in Constructive Mathematics.” In *Language, Mind, and Logic*, edited by J. Butterfield, pp. 211–229.
[2] Parsons, C. “Ontology and Mathematics.” Reprinted in Parsons 1983, pp. 37-60.
[3] Parsons, C. *Mathematical Thought and Its Objects*. Cambridge University Press, 2008, p. 34.
[4] Zach 用 Stroke-symbols 指代希尔伯特的笔画符号（Gestalten），本文采用这种术语使用的方式。Cf. Zach, R. “Hilbert's Program Then and Now.” *Philosophy of Logic*, 2006, pp. 411-447.

帕森斯从现象学的观点讨论了数学直观中的困难问题。[1]他认为从现象学的观点看，我们对于类型的意识本质上是感知性的。这种意识既包括对单个构型（token）的感知，也包括对构型的同一类型的把握，但是构型与类型之间的关系不是一种还原关系，而是一种现象学意义上的奠基关系。我们可以在经验中把握形式的同时而不必识别出其所奠基的具体对象。他认为"我既不需要符号的同一性认定，也不需要类型的同一性认定作为另一者的必要条件"。 帕森斯认为胡塞尔只是通过了范畴直观与感性直观的类比，但是没有给出具体解释，而他的类型直观是范畴直观的一种形式。因此我们要回答字符串类型的关系如何与具体对象的关系相关或如何在数学直观地运用中表现出来的问题。构型的代现内容并不是类型的代现内容，我们对一句话意义的感知和理解显然不是基于字迹笔画的物理特征作为必要条件的。构型的同一性标准只能奠基于类型的同一性标准，但是构型的同一性的标准并不能等同于类型的同一性的标准。

帕森斯进一步指出，这种构型—类型的同一性在数学直观中会带来模糊性困难。他以胡塞尔对有限集的直观为例，对可观察的有限的对象（一盒鸡蛋）的感知就是对其相关元素的集合的直观，其中鸡蛋的集合属于现象世界（非康德意义），而元素的集合则属于数学世界。给定一个集合 a，我们会期望对于给定的 x，$x \in a$ 是确定的。但是假设 x 是其中一个鸡蛋，而 x'是另一个鸡蛋。如果 $x'=x$，那么 $x' \in a$。但如果遇到一个形状非常像鸡蛋的土豆，无法根据鸡蛋的同一标准来确定 $x'=x$。那么似乎 $x' \in a$ 是不确定的。尽管康托尔规定集合由"明确区分的对象"组成，但集合应用于日常生活这不"明确区分"的鸡蛋集合时，会出现两个潜在元素的同一性认定的模糊性解释。同样，在构型与类型的同一性中，给定两个符号字符串 s-t 和 u-v，当且仅当 $s = u$ 且 $t = v$ 时，$st = uv$ 。但是，如果单个符号类型的同一性标准存在不确定性，这种不确定性将影响笔画符号的同一性。因为在类型的个体化中，人们会将任何模糊性的威胁转移到与其构形（tokens）的关系及其个体化。假设我们在直观笔画符号（a） 时，直观地感知一个字符串 I III，当我接着感知（b）时，也会直观地感知一个字符串 III I，我们会认为（a）和（b）两个构型属于同一类型吗？答案并不明确。这里的问题在于（a）的类型与标记（b） 之间的关系。因为如果（b）的构型元素排列间隔很大，且长短不同，这里会出现类型边界的模糊性。模糊性可能导致由（b）实例化的类型产生多义性，其中一种情况是接近（a）类型的边界。但是如果（b） 实例化的类型是单一性的，（b）

[1] Parsons, C."On Some Difficulties Concerning Intuition and Intuitive Knowledge." *Mind*, vol.102, no.406,1993, pp. 237-239.

被认为是属于（a）所在类型的成员，那么对（b）的直观需要在对（a）的构型的感知的基础上进行想象，从而形成对（a）类型的直观。但是不管怎么样，“由 (a) 实例化的类型 = 由 (b) 实例化的类型”的同一性不存在模糊性。

4.8.2 笔画符号序列的无限性与数学直观的想象权能

帕森斯认为解决了构型－类型的同一性问题，我们就可以构建满足皮亚诺公理的自然数类型系统及其相应的构型系统，获得算术中的直观模型。按照皮亚诺的自然数公理系统ω:

（A1）零是自然数： $0\in N$

（A2）每个自然数都有一个唯一的后继者： $n\in N$，存在一个唯一的 $S(n)\in N$

（A3）零不是任何自然数的后继，对于所有 $n\in N$，$S(n)\neq 0$

（A 4)不同的自然数具有不同的后继者：对于所有 $m,n\in N$,如果 $m\neq n$,$S(m)\neq S(n)$

（A5）最后是归纳公理，满足特定性质的自然数集合包含所有自然数。

那么按照帕森斯在希尔伯特元数学直观基础上发展起来的类型理论，我们可以构建这样一个构型－类型的准具体对象序列ω-: |、||、||| 、|...|，这里的‘|’是一个准具体对象，而‘.’表示后继函数，ω－序列中的每一项都对应着一个自然数ω，但序列本身并不等同于自然数系统，因为ω－序列是准具体的，而自然数是ω纯粹抽象的。

其中（A1*A3）我们能直观初始的竖线串|，因此我们对 A1 为真的知识是直观的（A2*A4）帕森斯认为，如果给定任意竖线串的记号，我们能看出总可以再添加一个竖线，因此我们对每个竖线串都有后继的知识是直观的，而两个竖线串记号属于同一类型，当且仅当组成这两个记号的竖线是等数的（equinumerous），而对于（A5*）帕森斯并不认为我们对归纳公理的知识是直观的，我们在这本文中不讨论这一点。问题在于笔画符号的后继序列能够无限扩展的可直观性质是满足皮亚诺自然数公理系统的关键。因为如果拟具体对象构造的ω－序列无限性的认识不是直观的，那么我们就无法获得相应ω序列构成的直观算术模型。

帕森斯认为由于希尔伯特笔画符号的直观理论局限于感知概念，因此无法解决笔画串（stroke string）序列的潜无限扩展难题。为了解决该问题，帕森斯引入了胡塞尔现象学直观理论的想象方案。

我们确实可以像胡塞尔那样谈论类型直观基于笔画符号的感知。在某些情况

下，这可能是想象而不是感知。[...]在大多数情况下，物理现实对于理解类型并不重要，类型直观的独特之处在于，奠基于它们的感知和想象发挥了典范作用。[1]

现象学的直观行为由感知和想象构成，包括类型本质在内的范畴直观奠基于感知意识和想象意识，而想象意识是获取本质的重要环节。[2]帕森斯认为类型范畴直观来源于作为构型的拟具体对象的感知代现（representation），就代现关系而言，胡塞尔用“当下拥有”（Gegenwärtigung）和“直观当下化”（auschauliche Vergegenwärtigung）来标示这两种意识行为的关系：感知代现是将代现内容把握为对象在当下的自身显现，是同一性代现；而想象则是在感知的基础上，将代现内容把握为不在场的对象相似物和图像，是一种相似性代现。[3] 想象意识是对感知意识的再造，首先一个天生的聋哑人无法想象音乐，其次想象意识不受限于感觉材料，因而它可以随意构造各种意向对象，可以脱离时间、空间的限制。[4]

帕森斯通过想象的思想实验来验证我们对于笔画串（stroke string）的潜无限扩展的知识是直观的。[5]我们能够模糊地想象一个笔画序列的竖线串构型，即想象一串笔画序列竖线而不清晰地想象其长度和内部结构。这种模糊想象同时需要满足两个条件：a) 添加笔画串的后继操作可以无穷迭代 b) 每一次添加新的竖线得到的笔画组成串都成为一个新的构型类型。考虑一个任意有限长度 n 的笔画串 k。其中 k 的任何竖线（无论是感知到的还是想象的）都会出现在某个空间视域中。这个视域中总有空间容纳一个额外的竖线，所以组成该笔画串的竖线数目与该笔画串是否可以被延长无关，通过证明一个任意有限长度 n 的笔画串可以被延长，就可以得出每个笔画串都有后继的结论。

但是帕森斯的想象思想实验中存在两个挑战，首先在模糊性想象中笔画穿的具体长度并不确定，其中的竖线笔画可能增加或者减少，因此我们无法通过笔画串的等数性原则而确定构型—类型的同一性。其次，想象实验中需要假设空间的无限性支持笔画串后继序列的潜无限可扩展性，但是要证明空间的无限性，又需要依赖笔画串序列的

[1] Parsons, C. *Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge University Press, 2007, pp. 161-162.
[2] 胡塞尔在后期的《纯粹现象学和现象学哲学的观念》第一卷（1913 年）和《现象学心理学》（1925 年）的本质学说中明确指出了想象和“自由”变更的必要性和优先性。
[3] 胡塞尔关于想象与直观的现象学研究可见 Hua XXIII 中关于想象和图像意识的现象学分析。
[4] 倪梁康：《关于想象及其各个类别的意识现象学分析》，《南京大学学报（哲学·人文科学·社会科学）》2021 年第 2 期。
[5] Parsons, C.“X*—Mathematical Intuition.” *Proceedings of the Aristotelian Society*, New Series, vol. 80, 1979-80, pp. 156-157.

无限可扩展性。[1]对于第一个反驳，我们可以在头脑中想象两个不同的对象 a 和 b 的所有细节，但我们想象 $a=b$ 或 $a\neq b$ 时，想象的是对象之间的关系，而不是对象本身的具体细节。同时，根据前面构型一类型的同一性分析，当我们想象同一个字符串序列的潜无穷扩展时，我们可以继续沿着这个方向想象下去，而不需要具体想象扩展前或扩展后的字符串的确切长度，也不需要重新确定字符串类型的同一性。按照现象学的直观理论，任何事物在我们感知和想象意识中都只能是部分地侧显，而不可能同时完全地显现。比如，一个立方体，我们一次只能看到它的几个面，而不可能一次看到它的所有面。对象的侧显是因为每一个现时的我思（Cogito）都具有其视域，视域的有限性与被直观的实在性有关， 视域的无限性与未被直观的潜能性有关。随着主体的运动，视域始终是活的、流动的，开放的，主体永远不能到达视域的边界。[2]帕森斯引用了和胡塞尔的视域概念具有相同意义的图形—背景结构（figure-ground structure）来反驳字符串序列的无限可扩展性依赖于空间的无限性。“它们并不意味着物理空间或时间是无限的。它们属于世界的“显现图像”。[3]帕森斯认为在直观笔画时存在一种构形一背景的结构。我们总是将作为构型的笔画串置于一定的背景中，而这个背景为构形的扩展提供了可能性。通过想象，我们总能在背景中找到扩展构形（字符串）的想象空间，从而支持了无限扩展的观念。这是一种想象的空间而非物理空间。他同时认为在时间经验的结构中，人们对未来的期待：|与作为当下的感知：（|）以及对刚刚过去的保留：（|(|)），一起构成了一种动态迭代的时间连续体的感知：|(|(|))，支持了这种笔画串潜无穷可扩展性的观点。在时间意识分析中，胡塞尔也在术语上将时间性的“滞留”或“前摄”称作内视域的侧显。[4]在胡塞尔看来想象作为回忆与期待意识是由“内时间意识”的结构决定的，回忆与过去以滞留的方式连接感知，期待与未来以前摄的方式连接感知。我们将在第 5 章详细讨论内时间意识和数的构造问题。

4.9 本章小结

希尔伯特在元数学中引入了康德的直观理论，提出了一种先于逻辑与运算的数学直观，他认为形式数学的有效性最终由元数学的“具体笔画符号的纯粹直观基础”所

[1] Page, J. “Parsons on Mathematical Intuition.” *Mind*, vol. 102, no. 406, 1993, pp. 223-232.
[2] Hua VI, S. 152.
[3] Parsons, C. 1993, P. 246.
[4] Hua X, S. 29;47.

保证。但是这种笔画符号（stroke-symbols）的直观与笔画符号的后继序列的直观中潜藏的语义指称与潜无穷归纳难题，引发了新康德主义学派中的尼尔森、穆勒以及现象学传统中贝克尔的批评。我们通过引入当代数学哲学中帕森斯基于现象学中感性直观与范畴直观的奠基关系与想象理论的基础，提出的构型—类型（token-type）的数学直观方案尝试解决了以上问题，并构建了满足皮亚诺公理的自然数的构型—类型，获得了算术中的直观模型。这种构型—类型的数学直观理论同时也放弃了对康德先验观念的辩护。我们将在下一章详细地讨论数学对象的范畴直观问题，提出一种完全从现象学的意向充实理论出发的数学直观理论方案。

第 5 章 数学直觉主义中时间意识与数的构造解释

我在阿姆斯特丹与布劳威尔的长时间对话是最有趣的部分，他给我留下了非常深刻的印象，一个完全独创的、彻底诚实的、真正的、非常现代的人。[1]

——胡塞尔

只有布劳威尔—外尔的理论是唯一符合构造现象学的根源研究的明确和必要要求的理论。正如科朗（Courant）写信告诉我的那样，希尔伯特也以一种新的方式设计了数学的基础，“完全符合现象学精神”！[2]

——胡塞尔

5.1 引言

对于我们如何认识数学对象的问题，胡塞尔和布劳威尔认为，数学对象的存在需要通过数学直观的意识构造，数学知识的客观性通过主观性获得认识论上的有效性。同时，数学直觉主义虽然致力于具体的数学对象的心智构造，但缺少充分论证的哲学基础；而胡塞尔的超越论现象学虽然致力于严格的意识哲学体系的构建，但缺少具体构造的数学对象。[3]因此，二者可以在数学认识中进行相互补充，对比解释，从而提供一种现象学的数学直觉主义的数学认识论解释。

胡塞尔的超越论现象学与布劳威尔的数学直觉主义之间的思想关系最早由其学生：贝克尔（Oscar Becker）、外尔（Hermann Weyl）、海廷（Arend Heyting）在各自的数学哲学中进行过引述和讨论，但都没有进行过系统的比较和阐释。[4]按照海廷的观点，数学直觉主义的主要特征在于（1）数学不仅是形式的，它也具有直观内容；（2）数

[1] Brief. IV, S. 153-157.
[2] 胡塞尔致外尔，1922 年 4 月 9 日,参见 Brief. VII, S.293-295. 值得一提的是，数学家理查德·科朗（Richard Courant）与埃迪·施泰茵（Edith Stein）是表兄妹。施泰茵前往哥廷根追随胡塞尔学习是由科朗所引荐。科朗有一段时间常常参加胡塞尔开设的“数学哲学问题选”中关于流形论的课程。具体可参见 Lavigne, Jean-François. Chronologie Edith Stein (12 octobre 1891–9 août 1942). *Penser avec Edith Stein De la phénoménologie à la métaphysique*, Hermann, 2022. pp. 17-22.
[3] 在本章的讨论中，为避免混淆，不会使用胡塞尔现象学中的直观（Intuition）替代布劳威尔数学直觉主义中的直觉（Intuition），二者都是时间性和意识构造（Constitution）的意义上使用。进一步地，我们也只在数学对象与形式系统的关系角度使用数学建构 (Construction)一词。
[4] 贝克尔对数学形式主义和直觉主义进行了系统的现象学解释，Cf. Becker, Oskar. *Mathematische Existenz, Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene*. 2nd ed., Max Niemeyer Verlag, 1973 [1927].

学对象是通过心智直接感知的，但数学知识并不依赖于经验。[1]当前关于数学直觉主义与现象学的关联研究中，Richard Tieszen 批评了通常论述中将数学直观误解为神秘认识的观点，讨论了笛卡尔、康德、胡塞尔哥德尔关于直观的认识论观点，主张直观作为数学知识的必要条件。他认为胡塞尔与布劳威尔都认为数学本质上是一种无语言的思维活动，强调数学认识活动中心理行为与反思的关系。[2]Mark van Atten 通过现象学的分析来解读数学直觉主义，证明了选择序列作为数学对象的合法性，[3]并且通过胡塞尔的滞留-前摄的内时间意识结构，解释了布劳威尔将迭代行为作为直观对象的可能性。

在 Richard Tieszen 与 Mark van Atten 的研究基础上，本文首先分析布劳威尔基于空的二一性的时间直观对序数构造，然后比较这种时间意识结构与胡塞尔的时间意识结构的异同。在相似的时间意识结构的前提下，进一步讨论二者对基数与序数的不同构造方案和时间性的关系。最后分析，胡塞尔基于意向性之链和“如此等等”的构造模式对潜无限的构造，以及布劳威尔对“如此等等”的迭代模式的批评，讨论在此基础上的时间连续统与选择序列解释中的前摄问题。

5.2 胡塞尔与布劳威尔的关系背景：阿姆斯特丹讲座

1928 年 4 月 22 日至 29 日，胡塞尔应荷兰哲学家与语言学家 Herman J. Pos 的邀请，在阿姆斯特丹举行了两场题为《现象学的心理学与超越论现象学》的讲座。在邀请信中，Herman J. Pos 提及了他代表布劳威尔对胡塞尔的关注和邀请，并提议胡塞尔演讲他的数学哲学，但是胡塞尔拒绝了这个提议：

> 我很想见到布劳威尔先生，但我肯定会让他失望。因为目前的数学哲学与我现在的思想有些脱节，这需要我花费很长时间重新熟悉，尽管我过去曾经研究过这一领域。我更愿意讲“现象学心理学与超越现象学。”[4]

胡塞尔和布劳威尔最终在阿姆斯特丹会面。布劳威尔满怀激动地写道：“此时，胡塞尔就在我身边，强烈地吸引着我。”[5]胡塞尔在写给海德格尔的书信中对布劳威尔和他的助手也进行了高度称赞：

[1] Heyting, Arendt. *Les fondements des mathématiques.Intuitionisme, théorie de la démonstration*. Gauthier-Villars, Paris, Louvain, 1955, p. 5.
[2] Tieszen, Richard. *Mathematical Intuition, Phenomenology, and Mathematical Knowledge*. Kluwer, 1989, pp. 1-2;80.
[3] Van Atten, Mark. *Brouwer Meets Husserl: On the Phenomenology of Choice Sequences*. Springer, 2007.
[4] Brief. IV, S. 339-442.
[5] Van Dalen, Dirk. *Companion to The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*. Springer, 2011, P. 1515.

在阿姆斯特丹，与布劳威尔的长时间对话是最有趣的部分，他给我留下了非常深刻的印象，一个完全独创的、彻底诚实的、真正的、非常现代的人。他一直都有自己的哲学助手，一位非常聪明的女士，完全熟悉我的著作，也包括《观念》，她确实是我在阿姆斯特丹演讲后的讨论中唯一明智的人。[1]

胡塞尔和布劳威尔两人于 1928 年在阿姆斯特丹亲自会面并进行讨论时，其具体对话内容已经无从得知，但彼时各自的学术体系都已经成熟[2]。在 1928 年 5 月 19 日致英伽登的信中，胡塞尔提到布劳威尔计划到弗莱堡拜访他。此外，在 5 月 12 日致曼科的信中，胡塞尔谈及布劳威尔曾向他询问阿姆斯特丹大学一个空缺的哲学教职的任命事宜，并提到贝克尔。胡塞尔则推荐曼科和贝克尔作为该职位的候选人。同时，胡塞尔催促海德格尔筹划出版已经由施泰茵修订的关于内时间意识现象学的早期讲座稿与研究稿。他在其中提及了布劳威尔，并和海德格尔讨论了《内时间意识的现象学讲座》中时间意识和内在时间意识的区分问题。但我们无法确定，胡塞尔对于时间讲稿的出版动机是否与布劳威尔的会谈有关。

这些书信构成了胡塞尔与布劳威尔会面的历史见证，但是这次历史性的会面对胡塞尔的哲学发展或布劳威尔的数学发展并没有产生某种深刻的联结。与魏尔斯特拉斯、黎曼、康托尔和希尔伯特等人对胡塞尔的影响不同，布劳威尔的著作在胡塞尔的哲学中几乎没有得到任何直接引用。同样的，布劳威尔本人也并没有直接论述过现象学的思想资源。当布劳威尔作为学生（大约在 1904 年）开始发展直觉主义时，胡塞尔已经出版了两部关于数学和逻辑哲学的主要著作：1891 年的《算术哲学》和 1900—1901 年的《逻辑研究》，但布劳威尔似乎并不了解这两部作品。在他 1904—1907 年期间准备论文的九本笔记本中也根本没有提到胡塞尔。[3]因此海德格尔认为“直觉主义在本质上受到现象学的影响”的观点是错误的。[4]另一方面，胡塞尔拥有一份布劳威尔的论文《形式主义和直觉主义》，该论文收藏的时间是在胡塞尔发表《形式逻辑与超越论逻辑》之后，[5]他在 1912 年的一份手稿中提及到了布劳威尔与外尔：

[1] Brief. IV, S. 156.胡塞尔致海德格尔 1928 年 5 月 9 日。

[2] 在 1928 年 3 月 10 日和 14 日，布劳威尔在维也纳举办了两场讲座，哥德尔和维特根斯坦都在其中。在另一场讲座之后，布劳威尔和维特根斯坦在一起讨论了整整一天的数学基础问题，这促使维特根斯坦决定重新返回哲学。到了 4 月份，布劳威尔在阿姆斯特丹与胡塞尔进行了会面和交谈。相关信息可参见 https://plato.stanford.edu/entries/brouwer/1928–1929。

[3] Van Atten, Mark. *Brouwer Meets Husserl: On the Phenomenology of Choice Sequences*. Springer, 2007.p.278.

[4] 海德格尔：《时间概念史导论》，欧东明译，商务印书馆，2014，第 4-5 页。

[5] 米雅·哈蒂莫：《胡塞尔的科学背景（1917—1938）：胡塞尔私人藏书室调研》，于宝山译，《中国现象学与哲学

一个人在对数学的判断中，**其全部意义完全取决于这些[基础]概念，是否应该遵循希尔伯特、布劳威尔或其他人？**我们能否如此确定，尽管这正是今天的共识，但古典数学和同样的物理学没有得到更好的建议？但我们不会在那里做得更好。它从未完成，而是它自身正在形成，因此问题重演，不可能有一个确定的选择来确定我们的规范。[1]

5.3 胡塞尔与布劳威尔的时间意识模型比较

5.3.1 布劳威尔与胡塞尔论数学对象的全时性

布劳威尔的直觉主义与逻辑主义、形式主义的不同之处在于，数学不是依赖于外部公理或逻辑规则，而是一个基于时间直观的内在构造过程。在其就职演讲《直观主义和形式主义》中，将他的数学哲学立场表述为“我放弃康德的空间的先天形式，但更坚决地坚持时间的先天形式”。[2]这种数学直觉的内在时间形式虽然符合康德关于时间定义的先天形式，但与康德不同的是，布劳威尔更加关注时间意识发生和数学构造。布劳威尔进一步区分了“直观”的时间和“科学”的时间，他认为，数学认识源自对时间意识的内在感知，是一种自主的内在心智的构造活动。[3]通过时间意识，我们能够构造出基本的数学概念和对象。因此，直觉主义数学要求任何数学命题的“存在性”必须通过数学直觉的构造证明。

从静态现象学到发生现象学的转变中，胡塞尔关于数学对象与时间性的关系论述也发生了关键转变。在《逻辑研究》时期，他认为数学对象是无时间的（Unzeitlich），[4]而在《经验与判断》中，则从构造性的角度将数学对象定义为全时性（Allzeitlich）的。[5]一方面，作为形式对象，它们的概念中不包含任何感性内容，而是指涉纯粹地适用于一般对象的结构，保持纯粹的形式特性。另一方面，数学对象要成为意识对象，就必须与意识发生关系，始终在意识中被重新理解，与整个时间范围相一致。在 1918 年的

评论》2023 年第 2 期，第 351-411 页。

[1] 转译自 Van Atten, Mark. *Brouwer Meets Husserl*, pp.64-65.具体可参见：胡塞尔手稿 D15, S.7-23（Husserl. *Urassoziation und Zeitigung; Konstitution des Realen, Zeit, Raum, Kausalitä*t. Transcribed by Marly Biemel, corrected by Karl Schuhmann, 1932）.

[2] Brouwer, L. E. J. “Intuitionism and Formalism. ”*Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 20, 1913, p. 85.

[3] Brouwer, L. E. J. Over de grondslagen der wiskunde. *PhD diss*., Universiteit van Amsterdam, 1907. English translation in Brouwer, 1975, p. 61; Brouwer, L. E. J. “Brouwer’s Cambridge Lectures on Intuitionism.” *In D. van Dalen* (Ed.), Cambridge University Press, 1981, p. 92.

[4] Hua XIX/1, S. A124/$B_1$123.

[5] EU, § 64.

贝尔瑙研究手稿中，胡塞尔指出，观念对象的超时间性（Überzeitlichkeit）并不意味着与时间性无关。与之相反，其本质在于它能够在任何一个时间点上本原的构造，在意识的统一性中被重复的构造且具有同一性。具有重新意向生活的所有构造性综合都建基于内时间意识的被动原综合之上或者活的当下。[1]因此，数学的客观性必须通过主观性的构造才能解释其有效性：

> 数学家并不以反思的方式探寻主观上构造的客观性的意义和可能性之主观来源和最终问题。这件事是哲学家的任务。[2]

综上，胡塞尔和布劳威尔都同意，客观知识的有效性都必须直接或间接地回溯至有限性主体的直观或构造，在其自身经验中被直接给予。

5.3.2 布劳威尔的二一性与胡塞尔的三一性时间意识结构

数学直觉主义为理解数学对象提供了一种基于时间感知的构造理论。布劳威尔强调，时间的感知和记忆（保持）是数学直觉的核心，而这种直觉通过自我展开的方式生成了数学对象。布劳威尔使用“二一性”（two-ity）来描述时间意识中的基础结构，即意识如何感知当前时刻与刚刚过去时刻的关系。这个结构对数学构建至关重要，因为它为构建数学对象提供了基础。布劳威尔的基本观点是数学直觉植根于对时间流动的感知。这种感知中可以描述为一个生命时刻分裂为两个完全不同的单元，其中一个会依次让位于另一个。主体因此首先有了对第一单元的感知，随着感知的单元让位于另一个单元，主体又有了对新的第二个单元的感知，但同时又在记忆中持存着对第一个单元的感知。在这种感知模式下，二一性出现了。布劳威尔进一步指出，当我们意识到这种“二一性”作为一种形式，不考虑在各个阶段给出的感官内容时，我们就拥有了布劳威尔所说的“数学的基本直觉”。主体能够剥离这种二一性的所有质性和感觉材料，从而获得“空的二一性”（empty twoity）[3]，这种空的形式就是数学的基本直觉。

> 直觉主义数学是一种本质上无语言的心灵活动，其源起于对时间流动的感知。这种时间流动的感知可以描述为一个生命时刻的分裂，分裂成两个截然不同的事

[1] Hua XXXIII, S. 322；Hua I, S. 79.
[2] 埃德蒙德·胡塞尔：《逻辑学与认识论导论》，郑辟瑞译，商务印书馆，2016，第 204、453–454 页。
[3] Brouwer, L. E. J. “Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism.” *South African Journal of Science*, vol. 49, 1952, pp. 139–146.

> 物，其中一个让位给另一个，但被记忆持留。如果这样产生的二一性被剥夺了所有的性质，它将进入所有二一性的共同底层的空的形式。正是这种共同底层，这种空的形式，构成了数学的基本直觉。[1]

在内部时间的流动中，人们可以意识到一个生命时刻分裂成两个不同的事物，其中一个让位给另一个但被记忆保留。人们可以辨识出一个之前和之后，总有一个“之间”。

> 这个基础，剥离了一切质性，剥离了任何变化的感知，是连续性与离散性的统一，是将若干实体通过一个“之间”连接在一起的可能性，这一基础不会被新的实体的加入所耗尽。[2]

布劳威尔指出，离散单位之间总是存在某种“之间”状态，连接我们在时间中感知两个事物的两个元素。这个“之间”不能通过新单元的插入而耗尽。这个“之间”永远不能被认为仅仅是单元的集合。[3]离散和连续是互补的，因为时间的离散性或分离性的要求是存在一个“之间”状态，而时间流动的意识只能通过对过去和现在的认知，或者过去和现在的区分来实现。

空的二一性及其可迭代操作是从时间移动体验的内部结构中抽象出来的。布劳威尔通过“二一性”这一概念，展示了从个体经验中抽象出数学概念的过程，这个空的“二一性”和它所组成的两个单元构成了基本的数学构造单位[4]。这一过程不仅适用于形成数字一和二的基本直觉，还可以将二一性的其中一个单元视为一个新的二一性，这一过程可以无限重复，形成所有限序数。这里需要注意的是，空的两一性的第一和第二单元，必须彼此不同。如果两个单元最终是相同的，那么显然就违反了布劳威尔规定的“一个事物让位于另一个事物”的直觉。但仅仅从一个单元开始获得自然数是不够的。一旦我们意识到感知中的一个单元转变为另外一个单元，我们便有了从中生成自然数的抽象二一性的基础。例如，如果我们将二一性的两个单元和相继关系规定为：$x_0=|(|)$，括号用来表示时间上的后继的记忆内容。如果我们总是用一个二一性替换最左边的字符串，这种原“二一性”便可以成为一个新的二一性，则我们得到：

[1] Brouwer, L. E. J. *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*. Cambridge University Press, 1981, pp. 4–5.
[2] Brouwer, L. E. J. Over de grondslagen der wiskunde. *PhD diss*., Universiteit van Amsterdam, 1907. English translation in Brouwer, 1975, p. 17.
[3] Brouwer, L. E. J. *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*. Cambridge University Press, 1981, p. 40.
[4] Brouwer, L. E. J. “Points and Spaces. ”*Canadian Journal of Mathematics*, vol. 6, 1954, p. 2.

$x_1=|(|)=|(|(|))$，$x_2=|(|(|))=|(|(|(|)))\cdots\cdots x_n=|(|(|(\cdots(|))\cdots))$（共滞留 n 次）。其中括号内的部分则表示我们刚刚所持留下来的次级回忆。这个过程意味着第一个原感觉在绝对的过渡中流动着的转变为它的滞留，这个滞留又转变为对此滞留的滞留，如此等等。但同时随着第一个滞留而有一个新的“现在”、一个新的原感觉在此，它与第一个滞留以连续—瞬间的方式相联结，以至于这河流的第二时段是这个新的现在的原感觉并且是以前的现在的滞留，而第三个时段中又是一个带有第二个原感觉的滞留的原感觉并且是第一个原感觉的滞留的滞留，如此等等。[1]

> 内省中可以意识到，这一基本操作通过记忆的持续保持，逐步生成每一个自然数、自然数的无限序列、任意有限序列，以及先前获得的数学系统的无限延续序列，最终形成一个不断扩展的数学系统，对应于经典数学中“可分”系统的概念。[2]

所有数学概念的构造都始于空的二一性所包含的两个单元作为起点以及形成二一性的可迭代性。这些构造基于脱离语言的内省意识和反思行为。我们通过内省意识，将二一性的一个单元视为一个新的二一性的基本操作，通过记忆的不变的持留，连续生成无限进行的自然数序列以及无限序数 ω。

> 作为心智，**它承担了体验现在和过去的感觉作为对象的功能**。通过对这种二一性现象的重述，该对象可以扩展到一个充满杂多感知的世界。[3]

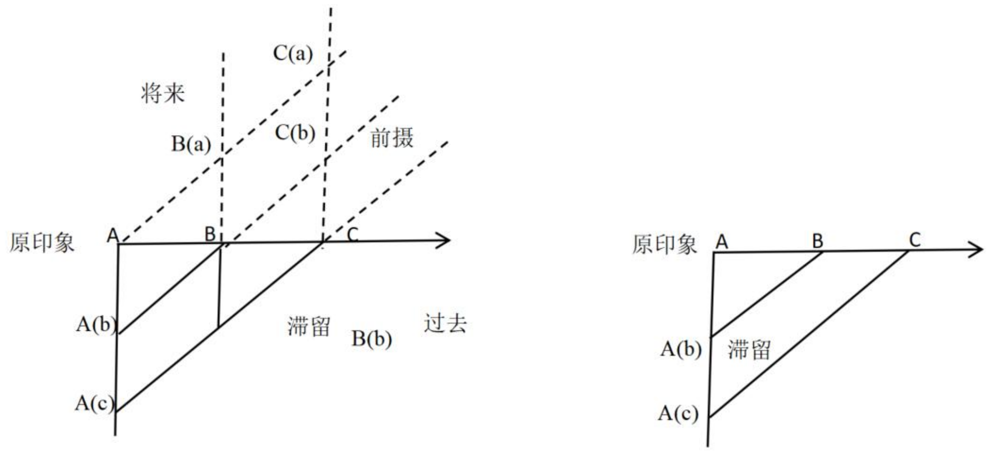
在胡塞尔看来，我们对时间的感知是一个统一的连续统，由原印象（primary impression）、滞留（retention）和前摄（protention）构成。在这个模型中，内在时间从原印象开始，这些原印象在意识中短暂“持留”，并且在这一保持过程中不断被变异：随着我在每一瞬间接收到新的原印象，之前的印象并没有完全从意识中消失，而是以变异的形式留存下来，它不再被视为当下的，而是被视为刚刚过去的。这种持留前一刻的原印象的意向性，我们称之为“滞留”，也就是布劳威尔在前面所论述的刚刚过去的被记忆的感知：主体又有了对新的第二个单元的感知，但同时又在记忆中持存

[1] Hua X, S. 435.进一步的论述还可参见肖德生：《胡塞尔在贝尔瑙手稿中对前摄的描述与分析》，《中山大学学报（社会科学版）》2011 年第 3 期，第 109—116 页。

[2] Brouwer, L. E. J. “Points and Spaces.” *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 6, 1954, p. 2.

[3] Brouwer, L. E. J. “Consciousness, Philosophy, and Mathematics.” P*roceedings of the 10th International Congress of Philosophy*, Amsterdam, 1948, p. 1235.

着对第一个单元的感知。但是，在布劳威尔的空的“二一性”结构中，并没有出现前摄的要素。前摄在此作为滞留的对立面出现，其功能与滞留类似，但指向未来。[1]我们在这里改变布劳威尔的“二一性”中原印象—滞留的结构顺序┃(｜）为（｜）┃，这里（｜）从滞留扭转为前摄。如果在时刻 x_0 的前摄为（｜），那么在 x_1 时刻则为：（｜）｜，此时 x_0 时刻的前摄（｜）充实为 x_1 原印象｜，此时 x_1 时刻的前摄为（｜），以此类推。但是由于在布劳威尔的空的“二一性”结构中缺乏前摄要素，尽管前摄与滞留都是充实发生所必需的，[2]但二者的意向本质不同，因此我们用胡塞尔的字符而非布劳威尔的笔画串来刻画下图中时间意识的性结构。



胡塞尔的三一性时间意识结构 布劳威尔的二一性时间意识结构（无前摄）

图 1

如果在时刻 B，我感知到 B 并且滞留流到 A，Ba，那么我还会预期 C，以此类推，在下一个瞬间 C，我将感知 C，滞留 B，Cb，并且保持 A 的二次滞留，Ca，同时预期 D，等等。[1]因此，胡塞尔与布劳威尔关于时间意识结构的共同之处在于：在后继阶段中，刚刚直观的内容以适当的方式持存并被记忆保留，这表明了记忆在构造过程中的重要作用。更具体地说，随着构造的开始并持续进行，刚刚直观的部分成为新鲜的回忆，虽然它们被保留并保持活跃，仍在处理构造的当前部分。实际上，如果不是这样，构造就无法作为一个统一的整体被感知。我们可以将这种保持过程的图示想象为图 1。水平轴表示连续的“现在”时刻或阶段的“流动现在”。水平轴下方的对角线表示所选择阶段中意识的一部分“持存”，这些保持随着它们逐渐沉入我们当下经验的较远部分而不断变化。在水平轴上，我们有一系列的后继者，而在每个阶段的垂直轴上，

[1] Hua X, S. 55.
[2] Hua XXIII, S. 46.

表示它们是如何在该阶段的一个意识中被统一或整合的。在水平轴上，我们有“多”，而在垂直轴上，我们有“一”，即综合。布劳威尔强调，在这个连续的、顺序的结构中，通过“之前”和“之后”的排列，我们的意识中如何将“之前”和“之后”或“一-二”统一在一起，从而使得我们在多中获得一。

从现象学角度看，布劳威尔的分析触及了数学概念构造的最深层次——所有对象在内时间中的构造层面：对时间直观的当下感知和对刚刚过去的直观的记忆的持留为布劳威尔的这种数学认识模式提供了必要的构造基础，也就是胡塞尔所谓的内时间意识结构的原印象和滞留，但是布劳威尔这里缺失了前摄环节。前摄涉及未来，而滞留及过去。[1]前摄通过对原印象充实的在先朝向而区别于滞留。胡塞尔认为，前摄之所以与滞留本质不同，是因为前瞻具有“努力”特征，前摄的努力特征是一种被动的指向性，这种意向性本质上属于前摄，它保证了时间的迭代进行。虽然滞留可以获得意向性，但它并不本质上具有意向性，[2]滞留使得时间的连续成为可能。胡塞尔认为意识的河流，在自身中朝向前行的方向是前摄，向着相反的方向则是滞留。在经验中，过去和未来之间存在一种不对称性。作为滞留的变异，在次级回忆中的过去是确定和固定的，我们没有改变它的自由。然而，前摄的意向和相关的未来是开放的，且更为不确定或模糊。我们将在下面分析布劳威尔和胡塞尔对序数和基数的不同进路的构造之后，最后讨论，由于选择序列在直观连续统构造的过程中对排中律的拒斥和其自由选择的自由度不可预测性和无法充实，布劳威尔在时间意识的论述中缺失了前摄的时间结构要素。

5.4 胡塞尔与布劳威尔关于基数、序数以及潜无限的构造性分析

在时间意识结构相似的前提下，胡塞尔和布劳威尔对数的概念分析和构造提出了相反的方案。胡塞尔认为数的基本概念是基数，序数在起源上依赖于基数。而布劳威尔则认为数的基本概念是序数，基数在起源上依赖于序数。我们将在下面分析这两种不同的构造方案及其差异的原因。

5.4.1 胡塞尔对基数和潜无限的构造

胡塞尔认为数的基本概念是通过集合联结形成的基数（Anzahl），[3]而且任何数学

[1] Hua X, S. 77; 373.
[2] Hua XI, S. 73;76-77.
[3] 为了方便比较，我们在这里将胡塞尔意义上的“个数”广泛地定义为基数。因为胡塞尔的“个数”意味着较小的可数的基数。

哲学都必须从对数的概念的分析开始。

> 因此，在任何情况下，对基数（Anzahlen） 概念的分析都是算术哲学的重要前提。这是其首要前提，除非有证据表明，逻辑上的优先权属于序数概念，正如其他观点所主张的那样。如果能够在完全忽视序数的情况下对整数概念进行分析，那么这将是证明该观点不可接受的最有力证据。[1]

胡塞尔将数规定为多，他认为数是对“多少”的回答。因此，对数的概念的理解首先要从多的概念开始，而概念则又是具体现象的抽象的表象，所以数的表象也就奠基于多的现象。这些具体的多的现象构成一个集合，胡塞尔称这种“确定的全体或多”为集合表象。而使集合表象成立的可能性条件是什么呢？胡塞尔认为集合表象的特征在于其元素的完全任意性：一本书、一杯咖啡、一个人或者一只猫、一棵树、一轮夕阳，但这些不同类型的内容和现象的多之间存在一种使得元素联结成集合的共有结构，胡塞尔称之为“集合联结”：

> 每个表象客体，不管是物理或心理的、抽象的或具体的，也不管是通过感觉还是想象而被给予，都能够和任意其他的、无论多少的客体统一成一个全体，并因此也能够被计数。[2]

但是集合联结如何脱离于其自身的元素而被抽离？作为具体物的元素如何成为“某物”？胡塞尔在这里运用了注意力这个概念的功能。经过注意力的抽象之后，元素成了“任意的某物或任意的一”。集合联结的语义表达“和”与“一”作为两个形式结构单元共同构成数的概念内涵：一和一、.....，其中“……”代表不确定性。随着集合联结的进行，多的概念就会分解为不同的多的数：2、3、4。在数数的过程，我们得到集合 A 中有 3 个元素，基数就是 3。这时的 3 并不是指“第三个”，而是指总共有多少个元素——这就是基数的含义。在此基础上，胡塞尔认为基数（Anzahlen）指代集合，序数则指代序列，而序列是有序的集合。因此序数的概念实际上包含并预设了基数的概念。[3]但是从上面的分析可以看出，胡塞尔在早期的《算术哲学》中并没有将意识的时间结构与基数的起源或构成联系起来。

[1] Hua XII, S.14.
[2] Hua XII, S. 32.
[3] Hua XII, S. 12.

我们已经在第一章讨论过《算术哲学》中本真表象和符号表象的问题。胡塞尔认为通过符号表象，集合的概念不再局限于“偶然的”或有限的集合，而且突破了“所有认知本质上的必要限制”，进入了无限的领域。例如，在集合论中，我们可以用符号如“{x|x 是自然数}”来表示自然数集合，而无需列举出所有的自然数。[1]在此基础上，胡塞尔讨论了有限主体对无穷集合的认识及其符号表象的问题，并且区分了较大的有限集与无限集。有限集合的生成通常是通过有限步骤完成的，每一步都可以明确地确定并操作。当我们讨论自然数集合时，我们通过一个递增过程逐步生成集合中的元素。例如，假设我们需要处理一个集合{1, 2, 3, ... , 100}，这是一个有限集合，虽然我们不能在一瞬间“列出”每个元素，但我们可以逐一地构造每个元素的观念，从 1 开始，每次都加 1，生成新的数字（2, 3, 4, ...）其生成过程在达到 100 时就终结。这种逐步构造的认识方式适用于有限集合，因为它们有一个明确的边界，允许我们通过不断扩展来完成对集合的理解。但是当讨论无限集合时，我们不仅面临着无法通过逐步展开元素来完成认知的问题，还需要考虑无限集合的不可操作性。例如，考虑实数集合 R，它不仅包含所有的有理数（可通过有限步骤表示），还包含无理数。无限集合的生成不可能在任何一个特定的时刻完成，因此在无限集合的生成过程中，谈论“最后一个元素”或“最后一步”显然是荒谬的。虽然我们可以用符号化方法表示 R，但我们无法通过任何有限的操作或认知步骤来完全“列出”其中的所有元素。胡塞尔认为无限集合的本质是无限延续过程而非最终形成的集合。尽管我们无法在有限时间内完全列出所有自然数，但通过引入“如此等等”这一延续的过程，我们依然能够理解如何从一个有限步骤的递增过程延续到无限的。这一思路不仅适用于自然数集合，也可以扩展到其他无限集合的构建，例如直线上的无限点集。我们可以想象直线上的某些点序列，先通过某种已知的规则分布这些点。例如，假设我们在一条直线上分布了一些点，可以通过给定的规则决定每个点的位置。这样，起初我们可能只能表示一个有限的点集。然而，借助于无限延续的观念，我们可以通过插入更多的点，使得这些点在直线的每两个相邻点之间逐渐填满，从而形成一个无限延续的点集。通过这一系列分析，我们可以清楚地看出，集合的概念，特别是无限集合的概念，不能仅仅依赖于有限集合的构建方式。虽然我们可以通过符号化表达有限集合，但在讨论无限集合时，我们必须引入一个扩展的概念，即通过无限延续的过程观念来构建集合。这一过

[1] Hua XII, S. 218.

程不仅是逐步扩展的，而是无限的，且其每个步骤都由明确的生成规则所决定。最终，这使得无限集合成为一个抽象的过程概念，而非一个简单的、通过逐一列举元素形成的集合。[1]

胡塞尔认为，尽管我们无法在有限时间内完全列出所有自然数，但通过引入“如此等等”这一持续的过程，我们依然能够构造潜无限。在《算术哲学》之后的《形式逻辑与超越论逻辑》的第 74 节“‘以此类推’之观念性，构造的无限性之观念性，及其主体相关项”，胡塞尔进一步给出了基数与无限集合的主观构造性起源。

> 我在这里想到了一个从未被逻辑学家强调过的“以此类推”（Und so weiter）的基本形式，这种迭代的“无限性”在主观上有其对应物，即“以此类推”。显然，这是一个观念化的过程，因为实际上没有人能够真正无限重复。然而，它在逻辑中无处不发挥着意义决定的作用。我们可以不断回到一个观念的意义单元，进而回到任何一个观念的统一体[…]数学是无限构造的领域，是一个观念性存在的国度，不仅包含“有限”的意义，也包含构造的无限性。显然，主观构造起源的问题在这里以隐藏的构造方法重复出现，这种方法应该被揭示并作为规范重建。[2]

他认为在逻辑学与数学构造过程中，“以此类推”的使用，表明我们能够一再重复地返回某一观念或过程。这一重复的行为，不仅是形式上的机械操作，更是一种观念化的延续过程。人们在构建无限集合时，实际上并没有通过逐一列举所有元素的方式，而是通过符号化手段，我们能够在观念上构造出一个无限延续的集合。每一个新的元素并不是通过物理操作得来的，而是通过符号规则不断迭代递推出来的。从某个符号初始值“a”开始，定义一个简单的操作“加 1”，通过每次加 1 得到下一个符号值“a+1”，并继续这一操作：$a \rightarrow a+1 \rightarrow a+2 \rightarrow a+3 \rightarrow \ldots$ 这一过程是迭代的，一种通过自身定义的方式来构造或展开的过程，每一步都依赖于前一步的结果，并无限地递推下去。这个过程隐含着“以此类推”的思想，即每次加 1 的“以此类推”的迭代递推操作，通过这种符号迭代的方式，我们能够观念化地构建出一个无限的数列，符号化地表示一个潜在的“无限”过程。

胡塞尔将无限的概念作为通过“先天的可构造性”或“可计算性”构造出来的逻

[1] Hua XII, S. 218-221.
[2] Hua XVII, S. 196.

辑上明证的对象，且在“逻辑上是闭合的”。因为我们将“一”理解为最普遍意义上的抽象单元，集合从而被理解为相互独立单元的迭代关系组合。[1]这种集合概念的形成是通过不断加一（如 2 + 1 等于 3，3 + 1 等于 4 等）的系统化迭代过程。

> 此外，计数是一种概念方法，在这种方法中，通过向已知数的独立单元添加新单元来生成数字，这一过程不仅具有一个“开放”的视域，而且被设想为一种**逻辑明证性：“对于一个任意数，总是可以无条件地（加 1）……”**。由此产生了一个无限的基本概念，即无限性作为一个闭合的、预先完成的逻辑思维领域，它由先天的可构造性、“可计算性”来界定，成为“可构造的观念”的视域——这是算术的、科学的工作领域。[2]

> 我可以随即思考一个生成序列：1、2、3，依此类推。这是一种在观念上可实践的意向和实现（Verwirklichung）。在此过程中，每个生成物都作为一个过渡环节—意向在此过程中得以充实，但又通过它作为最初的意向对象而指向下一个环节。在其中通过现时化（Aktualisierung）而得到充实，但这又仅仅只是一个过渡（环节），以此类推[…]这意味着：我在进行生成活动，并由此构成了一条实践的意向性之链，一条由意向与充实组成的链条，意向性贯通于每一个充实的环节。[3]

胡塞尔在这里通过意向性之链进行潜无限的构造。意向性之链（Verketten der Intentionalität）是由意向与充实组成的链条，意向性贯通于每一个充实的环节，它穿过当前环节而指向下一环节，并在后者得到充实时并再次穿过，将前序意向性传递至后续环节，将离散的计数行为统摄为连贯的意向性链条，使得每个数字既作为“已生成序列的终点”（如“5”终结了“1-4”的意向性环节），又作为“未完成序列的起点”（如“5”指向“6”的可能性）。从一开始，意向性就作为统一体而延展，使得每个充实既是终点又是过渡点。胡塞尔认为实际计数行为始终受限于具体计数对象（如“3 个苹果”），但通过“依此类推”的规则，意向性可构造潜无限的序列。这种无限性并非经验外推，而是通过形式化（如皮亚诺公理中的“后继函数”）被构想为观念对象。由此，数学计数成为一种纯粹的概念操作和逻辑推演。基于对“一”和“集合”

[1] Hua XXIX, S. 204.
[2] Hua VII, S.152.
[3] Lohmar and Carlo Ierna. “Husserl’s Manuscript A I 35.”*Husserl and Analytic Philosophy*, edited by Guillermo E. Rosado Haddock, De Gruyter, 2016, pp. 289-291.

之间的重复递归和迭代，就可以引入“潜无限”的概念。因为我们总是可以在一个已有的数后面再加一个“1”，每加一个“1”就是在前面的基础上进行的再次构造。每个集合形式（如“包含 n 个元素的集合”）均可被观念化为“更大集合”的基础，从而过渡到更高阶的数（如 n+1）。[1]这种重复和同一性确保了无限概念的逻辑明证性。如果每次的迭代都是相同的结构（比如总是加 1），那么每一步的结果都在某种程度上是“自我重复”的无限，不再是一个没有规则、无法控制的扩展，而是依赖于某种结构来保持其可理解性和“有限性”——它通过固定的步骤和规则，在无限的过程中建立一种某种程度上封闭的，成为“可构造的观念”的视域，具有了胡塞尔所说的逻辑明证性。

通过符号表象获得的无限性，虽然超越了有限的认识主体，这种无限性本质上却仍然源于人类体验中的时间维度。这种形式上的无限既不是实际存在的，也不具有高斯所谓的神的计算的特征，而是一种时间意义上的无限。因此，无限集合只能作为“潜无限集合”存在。根据胡塞尔对无限集合的表象递推迭代方式，无穷数列的表象方式是由符号表象和在时间行为中无限叠加的“以此类推”将无穷表现为“潜无限”。对于有限主体的时间性构造和认识而言，我们只能通过一种不断扩展、潜在的方式来“接近”无穷，而无法将其作为一个完整的对象构造出来，无限集合的概念不仅仅是一个集合本身，而是一个通过过程不断生成的集合。尽管没有终点，但每一步的生成都有明确的定义和规则，每一个新的元素都由前面的规则推导出来，通过符号和逻辑规则，可以不断地生成新的元素，生成潜无限集合。胡塞尔正是通过这一点阐述了无穷集合概念的动态性质，即它是一种开放的、未完成的构造，而非一个完全的、实际上可以把握的集合。朝向实无限的构造意向是“荒谬的”，无限集合仅能作为潜无穷的集合活动被设想，而不能够作为实无限的概念化存在，这不仅仅是人类的认知局限，而是一种逻辑上的不可能性，甚至“上帝”也无法做到这一点。

综上所述，胡塞尔通过对有限性和无穷性的现象学考察，提出了一种基于潜无穷的现象学的超越论构造方式：通过符号化的“以此类推”的“a”到“a+1”的迭代，建立了一个潜无限的过程，否定了传统神学中关于“神的算术”以及无限智力的假设。这一思考过程不仅回应了高斯“神在计算”的批判性讨论，[2]也引出了对无限问题进行

[1] Lohmar and Carlo Ierna. “Husserl’s Manuscript A I 35.”*Husserl and Analytic Philosophy*, edited by Guillermo E. Rosado Haddock, De Gruyter, 2016, pp. 289-291.

[2] 关于胡塞尔对高斯的批评，我们将在本文的 8. 4 节中对《算术哲学》中的潜无限和实无限问题的进一步论述中展

超越论现象学构造的意识行为的迭代问题。

5.4.2 布劳威尔对序数和潜无限的构造

布劳威尔认为数的基本概念是建立在二一性基础上的序数（Ordinalzahl）。从时间移动的体验结构中抽象出来的空的二一性及其嵌套迭代结构是序数概念的一部分。

> 如果由此产生的二一性被剥去一切性质，那么剩下的就是所有二一性共同基础的空形式。正是这个共同基础，这个空形式，构成了数学的基本直观。[1]

在布劳威尔对时间意识和序数生成的分析中，二一性的两个部分不是相互独立的，其中一个部分嵌入另一个部分，并且不断分化迭代，这种嵌入式的迭代确定了顺序关系。首先，空的二一性扩展为|(|)，括号用来表示时间上的滞留内容，我们定义为序数 2，通过进一步的抽象行为，人们从空的二一元中得到数字 1。因此，从发生学的角度来看，序数 2 比序数 1 更为基础。随着原印象不断地下坠回退为滞留，二一元性的后半部分分裂成一个新的二一性，旧的二一性成为其中的一个部分。如果我们总是用一个二一性替换最右边的划线，则得到|(|(|))，这个新的二一性形式现在对应于数字 3。因为二一性的其中一个元素可以被视为一个新的二一性，只要单位的一个元素可以被认为是一个新的二一性，这个过程可以无限次重复，从而产生最小的无限序数 ω（即 1,2,3,之后的第一个数字）。[2]布劳威尔试图试从康托尔的第二数类（所有可数无限序数的类）和更高数类中构造出意义时，他意识到这是行不通的，于是拒绝了更高数类，只留下所有有限序数和未完成或开放的可数无限序数集合。

从上面的分析可以看出，胡塞尔没有将意识的时间结构与序数的起源或构造联系起来。胡塞尔与布劳威尔关于基数和序数构造的分歧根源在于数字背后的心理学基本概念不是集合的概念，而是序列的概念。[3]因为集合的概念依赖于序列的概念，所以基数的概念依赖于序数的概念。序数帮助我们在数数时定义每个元素的顺序，而基数则总结了数数的总结果——即元素的数量。数数时的“第一、第二、第三”正是序数的作用，而最终的“3”则是基数的结果，表示集合中有多少个元素。在胡塞尔的分析过

开。

[1] Brouwer. “Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism.” *South African Journal of Science*, *vol.* 49, 1952, p. 139.

[2] Brouwer. *Collected works I. Philosophy and Foundations of Mathematics*, ed. A. Heyting. North-Holland, Amsterdam, 1975, pp.127-128.

[3] 关于胡塞尔与布劳威尔对基数和序数的进一步分析参见 Van Atten, Mark. *Brouwer Meets Husserl*, pp.118-121.

程中，我们可以看出，基数是通过数数的过程得来的。基数 3 的数数过程实际上是通过序数的递增（第一、第二、第三）来完成的。通过这个递增的序数过程，我们得到了基数 3，表示集合中有 3 个元素。对于有限集合，数数的过程是有限的，而对于无限集合，尽管数数的过程不能完全完成，但我们依然通过序数递增的方式来描述它的大小（基数）。因此，我们在分析之后得出结论：布劳威尔对序数的描述比胡塞尔在算术哲学中的描述更加准确，因为对于基数 n 的理解，必须是从结构中的单位顺序中抽象出来 。[1]

布劳威尔基于直觉主义的序数构造，进一步考虑了胡塞尔指出的这种“如此等等”的基本模式是否可以满足康托尔的超限数：

> 在这里，康托尔提到了某些无法被思考的东西，即无法被数学构造的东西；因为通过“如此等等”方式构造的整体只有在“如此等等”指向相同对象的序类型ω时才能被思考，而这个“等等”既不指向序类型ω，也不指向相同的对象。在这里，康托尔失去了与数学坚实基础的联系。[2]

但是与胡塞尔认为“如此等等”的基本结构是一种类似于 n+1 的迭代模式不同，布劳威尔认为通过“如此等等”的方式来构造数学对象，是不充分的。因为，首先“如此等等”在数学中是模糊的，缺乏精确的定义，而且没有明确规定的构造规则，不同的人可能会有不同的理解，导致构造出的对象可能并不相同。而序类型ω是指自然数的标准顺序类型，一个严格定义的无限序列。因此“如此等等”的模糊模式也无法严格地指向序类型ω，更加无法保证构造出的对象是相同的。

其次，因为“0 和 1 之间的所有实数的集合”这个表述并没有指称任何对象。我们只能有效地构造出可数的对象集，无论是通过递归还是通过一系列自由选择。同样的对于超限基数的原则：康托尔将所有可数无穷序数的集合（即序数类型为 ω的序数）的大小实际上是 $\aleph_0$（可数无限基数），并得出第一个不可数基数$\aleph_1 > \aleph_0$的结论。布劳威尔认为使用全称表达“所有的...”并没有给定$\aleph n$ 的任何指称对象，康托尔关于超限的这个命题是没有意义的，我们可以通过递归过程或自由选择构造出任何集合。[3]布劳

[1] Tieszen, R. *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge*. Kluwer, 1989, p. 105.

[2] Brouwer. *Collected works I*. Philosophy and Foundations of Mathematics, ed. A. Heyting. North-Holland, Amsterdam, 1975, p. 81.

[3] Brouwer. *Collected works I*. Philosophy and Foundations of Mathematics, ed. A. Heyting. North-Holland, Amsterdam, 1975, pp. 135-136.

威尔由此得出结论，基于对“如此等等”这个基本结构的模式理解，康托尔提到的是无法通过有限的、明确的步骤来构造的数学对象，这些超越人类思维能力的数学概念因而无法被真正“思考”或理解。基于此，只有在时间性中构造的潜无限在数学中才是合法和有效的。

5.5 序数与基数构造中的时间性问题

但是进一步的问题是，胡塞尔与布劳威尔在对基数与序数的构造中，数与时间性的关系是什么？Hill 认为胡塞尔不是弗雷格主义意义上的心理主义者，但他是布劳威尔主义者的心理主义理论仍然吸引着一些人，并有待于反驳。[1]她的观点依据是布劳威尔的数学起源于对时间运动的感知，但是胡塞尔在《算术哲学》一书中拒绝了基于时间直观的数的理论。她认为，布劳威尔的数学起源于对时间运动的感知，胡塞尔在《算术哲学》一书中拒绝了基于时间直观的数字理论，这两种观点形成了鲜明对比。但是胡塞尔所批评的是时间进入数字概念内容的观点，这并不是布劳威尔的观点。[2]序数的顺序当然是建立在时间固有的顺序上的，但时间本身并没有进入序数概念的内容。基数也是如此，它是根据序数和从排序中抽象出来的概念来定义的。

> 因此，我们看到，时间只是我们概念的心理前提，并且以两种方式……但我们发现，时间上的同时性和连续性都不会以任何方式进入多的(逻辑)内容;同样地，也不会进入数的表象。[3]

我们将通过分析胡塞尔在基数分析构造中集合联结中的时间意识与布劳威尔在序数构造中的二一性的时间意识结构的关系反驳这种观点，并进一步反驳通过时间性对数学认识进行心理学解释的错误。

胡塞尔在《算术哲学》中拒绝了康德通过时间性（通过纯粹直观）对数的解释，也批评了亚里士多德将数与时间并置在一起：“时间是运动的数目”。[4]时间性确实是数字的“心理前提条件”，但并不是构造的根本。在数学对象的时间性问题中，胡塞尔认为，虽然在数的概念的起源中，时间只是我们概念的心理前提，而且时间上的同时

[1] Hill, Claire Ortiz. “Husserl on Axiomatization and Arithmetic.” Edited by Mirja Hartimo, *Phenomenology and Mathematics*, Springer, 2010, pp. 64–65.

[2] 对 Hill 的这种观点的批评可参见 Van Atten, Mark. *Essays on Gödel’s Reception of Leibniz, Husserl, and Brouwer*. Springer, 2015, pp.263-267.

[3] Hua XII, S. 33.

[4] Hua XXI, S. 32.

性和连续性都不会以任何方式进入多的（逻辑）内容；同样地，也不会进入数的表象。集合联结虽然不是一种物理关系，但也并非等同于一种意识的统一形式或者时间的同时性和相继性。就意识统一形式而言，因为集合联结具有一种自发性，其本质不是拥有所有的意识内容，而是在于能够自发地关注到任何内容，因此二者并不相同；其次集合联结也并非等同于时间的同时，比如音乐的表象是相继的，而并非同时的；其次集合联结也不在于时间的相继性。因为时间相继的表象内容最终还需要一个整体的综合行为。因此，不论是时间的相继性还是同时性，仅是数和多数的心理学发生前提，而与其内涵意义无关。[1]在对数概念的集合行为的分析中，胡塞尔已经将发生心理学中的时间因素完全排除干净。

布劳威尔在这个角度会同意胡塞尔的观点，因为感知时间的连续性内容并不意味着将内容感知为时间的连续性。对他来说，序数概念是根据迭代的空二一性定义的，这些都是纯粹形式（范畴）对象。序数的顺序确实基于时间的内在顺序，但时间本身并没有进入序数概念的内容。基数也是如此，它们是根据序数和抽象化排序定义的。即使任何数学对象的构造都需要感知时间的流动，但这本身并不意味着时间进入了数学概念的内容（数的概念的就是一个例子）空的二一性及其可迭代性是从时间运动感知内部结构中抽象出来。从数学对象的构造角度，二人都同意数学对象的主观构造过程并没有使得这些对象在时间中被个体化，而且不关注个体的心理体验。他们认为，形式基于感性：任何形式对象的构造都必须以某种感性质料为起点，但随后质料被抽象掉了。纯粹范畴对象可以基于任何感性一物质内容构造，重要的只是形式。这意味着数学对象并非任意，它们的构造受到范畴形成法则的约束。[2]这与布劳威尔的观点相似，他认为空的二一性是主体在时间移动中剥离了所有的性质而抽象出来的空的二一性，这种空的二一性是整个数学构造的基础。

5.6 直观连续统与选择序列解释中的前摄要素问题

在胡塞尔看来，我们对时间的感知是一个由原印象（primary impression）、滞留（retention）和前摄（protention）构成的连续统。感知中不仅包含着一个当下的“原印象”，它构成这个感知的中心，而且还包含着一个在时间上向前的前摄和向后伸展着

[1] Hua XII, S. 33.
[2] Hua XVII, § 62.

的滞留。胡塞尔将这种活的当下描述为一个“晕”或“彗星尾”，这个连续体不是由离散的点组成的，时间流的“部分”是非独立的。布劳威尔同样认为数学直觉的时间感知具有连续性和整体性：作为一个整体，连续体直观地呈现给我们；而对连续统的构造，一个通过数学直观就能创建的“所有点”的行为是无法想象和不可能的。[1]由于胡塞尔时间意识讲座的现象学影响，外尔在《连续统》中将胡塞尔的时间连续统作为直观连续统的模型，并试图解决直观连续统与数学连续统的关系问题：

> 为了更好地理解直观给出的连续统和数的概念之间的关系，让我们坚持把时间作为最基本的连续统一体。为了完全保持在直接给予的领域内，让我们坚持现象时间（而不是客观时间），也就是说，坚持我的意识体验的恒定形式，借此它们在我看来连续流动。[2]

然而，时间感知的意识连续统可以被数学分析或逻辑化吗？意识连续统的数学化前提是将其解析为点集，胡塞尔明确反对对意识流进行数学连续统的分析，认为这种行为误解了直观连续统的本质。[3]外尔后期也认识到直观的连续统和数学的连续统并不一致，无法相互解释，[4]他转而接受了布劳威尔的选择序列作为连续统的模型而放弃了胡塞尔的时间连续统。

布劳威尔认为有两种类型的连续统数学分析。第一类是康托尔和戴德金的分析，它们依赖于实无限的、不可数的集合。但是直观连续统不是由理想化的离散、无持续时间的点组成的，集合论无法为直观连续统提供一种合法的数学分析。另一种类型是直觉主义的分析，布劳威尔认为直觉连续统的基本关系式不是康托尔数学分析中的元素与集合的包含关系，而是二一性这样的部分—整体之间的相互蕴含和嵌套的关系，作为未完成的、非法则性的对象，它们的性质不能被视为形成集合的离散元素。他将二一性作为直觉主义连续统理论的基础，并在二一性的自我扩展的基础上引入了选择序列,以数学方式分析处理直观连续统中的离散—连续问题。

在传统的经典数学中，序列通常被视为一种无限的对象。例如，自然数序列｛N｝

[1] van Atten, M., van Dalen, D., and Tieszen, R. “Brouwer and Weyl: The Phenomenology and Mathematics of the Intuitive Continuum.” *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 3, 2002, pp. 203–226.
[2] H. Weyl. *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Veit, Leipzig, 1918, S.88.
[3] Hua III/1, S. 154.
[4] Weyl, Hermann. *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Veit, Leipzig, 1918, S. 93. 以及 Weyl, Hermann. “Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 10, 1921, S. 39–79.

是一种无限集合，其中每个元素都是基于一种法则的定义。根据布劳威尔的观点，这种序列在直觉主义的数学认识中是有问题的，其基本假设在于抽象公理的使用。抽象公理允许我们假定存在一个由特定性质的元素组成的集合，并允许我们将无限的元素总体上视为一种给定的事物，并因此预设了实现无限的存在。布劳威尔将这种方法批评为“实体化”（hypostase），因为这种方法预设导致了这些元素不能通过具体的、可操作的过程而被构造，因此无法作为认识中确定的对象。因此实无限可以作为一个概念存在（在意义层面），但它不能被视为一个对象存在（在指称层面）。尽管我们可以理解和讨论实无限这个概念，但我们在数学认识中将其视为一个可以操作或与之交互的实体。以介于 0 和 1 之间的实数为例：这个概念指代的是任何一个在 0 和 1 之间的数，如果我们能确定一个构造小数序列特定规则，允许我们通过有限次操作确定任何一个小数，那么这个概念就具有有效的指称。但是对于“连续区间[0,1]，即 0 和 1 之间的所有实数的集合”，以及“这个区间的大小是$\aleph_0$之后的第二个超限基数”这样的陈述是没有意义的：

因此，布劳威尔认为在直觉主义数学中，序列的定义不能简单地依赖于无限集合作为对象，而应当以一种构造性的方式来表示，数学对象的存在是一种动态的生成过程。他在此基础上提出了规则序列的构造和自由选择序列的构造两种模式。[1]这两种数学模式界定了一种通过构造过程逐步生成的序列形式，而非一种抽象的、已完成的无限对象，尤其是自由选择序列在直觉主义连续理论中起着关键作用。数学家作为主体任意选择，其中每次生成的元素都是有限的，并且每个选择都不依赖于先前的选择，在任何特定的时刻，只有有限的选择会被做出，因此一个选择序列总是在生成，并且永远不会结束。布劳威尔认为选择序列中的点“始终是某种正在生成的事物，并且经常保持不确定的状态。我们在下面对规则序列的构造和自由选择序列的构造两种模式进行对比分析。

布劳威尔对“类规则”（lawlike sequences）序列的定义是指所有值项完全由某些固定法则在某个有限阶段通过递归关系或算法定义的有限构造步骤进行完全地描述。假设我们构造一个规则数列β，规则规定的每个数列项必须按照递增的顺序来选择：即β(n)=(1,2,3,4,5,6)。在这种情况下，数列的每一项α（n）都是通过明确的规则直接确定的，且不会有任何自由选择的空间。例如，自然数序列｛N｝就是一个规则序列。这个

[1] Moschovakis, Joan R. “An Intuitionistic Theory of Lawlike, Choice and Lawless Sequences.” *Logic Colloquium '90: ASL Summer Meeting in Helsinki, Association for Symbolic Logic*, 1993, pp. 191–209.

序列可以通过唯一元素 0 和后继函数来完全描述，从而可以知道序列中第 i 个元素是 i−1（即其前一个元素），序列的每个元素都是通过明确的构造规则生成的，其结构是完备且可预测的。

与类规则序列不同，选择序列作为一个潜在的无限序列，主体依次选择其中的元素且在做出选择时享有完全的自由，包括对自我的选择施加限制的自由。在自由选择序列生成的每个阶段，仅仅确定了有限的初始项，我们可以规定序列中的值必须来自某个特定的集合，例如自然数集或有限集。这种预设的取值范围并不会限制序列的“自由度”。其次，尽管无规律序列的生成过程没有固定的预设值，但我们仍然可以对序列的初始部分进行指定，每一项都可以独立选择，且每次选择的数字与之前的数字都没有任何固定关系。[1]自由选择序列在某些方面类似于随机过程，但它依然是一种构造性定义。例如，掷骰子的过程就是一个典型的类似于自由选择序列的无规则序列。我们可以选择某颗骰子，并预设前 k 次掷骰子的结果（对于 k∈N）。然而，然而，随着掷骰过程的继续，即使我们限制结果只能在｛1,2,3,4,5,6｝之间，仍然无法提前得知每次掷骰的具体值。掷骰子的过程可能被规定为从｛1,2,3,4,5,6｝中随机选择数字，这一规则构成了无规律序列的生成过程。掷骰子的这一例子恰好展示了选择序列的“自由度”，在序列的构建过程中，未来的每一项都是完全开放的，不被任何先前条件所决定。

选择序列是一个潜无限序列，因此是依赖于时间的对象。布劳威尔由此认为数学对象是生成的，而不是通过定义存在的。数学对象的存在最终依赖于时间性和构造性，我们只能谈论那些可以通过有限过程逐步构造，动态生成的数学对象实现的对象。但是结合我们在上一节的论述，自由选择序列是在二一性的自我展开的基础上进行的，由于自由选择序列特有属性的自由度和随机性，规定了每一项都可以在时间中独立选择，但每次选择的项与之前的项不存在任何固定关系和规则，未来的每一项都是完全开放的，这种开放性完全是突破胡塞尔意义上时间视域的延展性。胡塞尔将“前摄”理解为意识与一个被意识之物的本原意向关系，时间性构造的综合有效性，不仅是通过滞留而保持，而且是通过前摄的在先把握而得以发生：联想的时间化成就之进程已经具有目的论的含义，它已经是“朝向”（angelegt-auf）。[2]但是前摄作为数学认识中

[1] Brouwer. *Collected works I*. Philosophy and Foundations of Mathematics, ed. A. Heyting. North-Holland, Amsterdam, 1975, p. 85.

[2] 克劳斯·黑尔德：《活的当下》，肖德生、鲍克伟译，商务印书馆，2020 年 10 月，第 55 页。

的意向活动，选择序列不允许前摄存在一个可待充实的意向而破坏其自由度和随机性。换言之，前摄既不表示直接所予，也不表示构造的成就和结果，因此，它不能成为数学构造之基础的数学直觉的一个要素。自由选择序列在时间性构造中对主体性的这种要求使得前摄作为一种朝向意指之物的充实的趋向与自由选择序列中必须空乏的意向是矛盾的。因此，可以得出结论，正是由于自由选择序列的自由度和开放性使得数学主体在时间性的认识活动中从一开始就拒斥前摄作为一门目的论的意向原形式，布劳威尔的二一性的时间意识结构最终没有鲜明的前摄要素的标记和补充。

5.7 本章小结

每一个线性连续统本质上都是通过无限迭代的过程生成的。布劳威尔的“二一性”是时间意识中的基本结构，这个结构为构造数学对象提供了基础。虽然在他对“二一性”的时间意识分析中，前摄没有明显的构成作用，但是只有通过二一性的自我展开的迭代，我们才能连续操作而构造出更复杂的数学对象。[1]前摄作为时间意识的一个要素，使得我们对时间感知的已经移动和继续移动的认识得以可能。也就是说，它是布劳威尔的时间意识中二一性的自我展开进程中的迭代动力因。因此，布劳威尔的“二一性”的时间意识依然隐含着胡塞尔的前摄要素，只有这样，时间意识的连续性和迭代才得以有可能。

[1] Mark van Atten, Intuition, Iteration, Induction, *Philosophia Mathematica*, Volume 32, Issue 1, February 2024, Pages 34–81.

第 6 章 直觉主义逻辑的意向充实理论解释与超越论逻辑

我们从“逻辑原理”的明见性问题开始。[...]人们也可以追加另外两个不同的原理：(1) 如果任意一个 A 为真，那么其矛盾的对立面就为假：(2) 两个判断之中总有一个判断要么为真，要么为假。但是，问题在于，是否这种三重划分是同质的，因为“一劳永逸”是一种主观的说法，而不是纯粹客观的原则。[1]

——胡塞尔

对无限集合而言，排中律不再有效。依我看，可解性公理（Lösbarkeitsaxiom）和排中律二者都是错误的；之所以历史上会产生对它们的信奉，是因为人们先是从某个特定有限集合之子集的数学中抽象出了经典逻辑，然后又把这种逻辑当作先于并独立于数学而存在的一种先天实体看待，最后，基于这种所谓先天性的错误理由，把它不恰当地应用到了无限集合（unendliche Mengen）的数学之中。[2]

——布劳威尔

6.1 引言

在对直觉主视角下对的数学对象（基数、序数、选择序列）进行的现象学分析之后，我们现在进入对直觉主义逻辑命题的现象学分析。我们将从布劳威尔对于排中律的拒绝开始，然后分析海廷通过贝克尔所做的基于现象学的直觉主义的逻辑解释。

6.2 布劳威尔对排中律的拒斥

直觉主义数学要求证明必须依赖于构造性的方法，任何数学命题的存在性必须通过构造过程来证明。对于布劳威尔来说，一个命题只有在有构造性证明其为真或为假的情况下，才能断定 P 或 ¬P 为真，而不仅仅是通过否定或形式系统定义的证明方式。命题的真与其可构造性密切相关，这一观点直接影响了直觉主义对经典数学证明方法

[1] Hua XVII, S. 171-172.

[2] Brouwer, L. E. J. “Intuitionistische Mengenlehre.” *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 28, 1919, pp. 203–208.

的拒绝，特别是对于排中律 P∨¬P ：一个命题要么为真；要么是假的，没有第三种可能性。直觉主义逻辑不接受排中律，因为从数学构造的观点看：只有当我们能构造出 A 的证明或者 P 的否定的证明时，才可以断言 P∨¬P。换句话说，在直觉主义逻辑中，一个命题 P 不一定满足经典逻辑中的二值律，即 P 或 ¬P 必然为真。例如：费马定理中的费马数需要满足 $x_n + y_n = z_n$ 的方程，其中 n 是大于 2 的正整数。这个方程假设了费马数的存在性，即是否存在一组整数解。如果我们假设排中律成立，那么我们可以明确地选择费马数存在或不存在。然而，如果我们无法找到有效的证据来证明或否定费马定理的真实性，那么我们就无法确定这个选择是否正确 。尤其在经典逻辑中否定 ¬P 表示 “P 不成立” 或者 “P 在所有可能世界中都为假”。但在直觉主义逻辑中，¬P 只是意味着：如果 P 成立，则会导致矛盾。因此，它不能简单地被理解为 “P 不成立”。

布劳威尔将对排中律的这种普遍有效性的信念归因于一种不完全归纳法的错误应用，即从有限状态（特别是那些源自将有限数学应用于日常现象的情况）不加证明地推广到无限状态。[1]

> 对无限集合而言，排中律不再有效。依我看，可解性公理（Lösbarkeitsaxiom）[2]和排中律二者都是错误的；之所以历史上会产生对它们的信奉，是因为人们先是从某个特定有限集合之子集的数学中抽象出了经典逻辑，然后又把这种逻辑当作先于并独立于数学而存在的一种先天实体看待，最后，基于这种所谓先天性的错误理由，把它不恰当地应用到了无限集合（unendliche Mengen）的数学之中。[3]

因此直觉主义者在有限集合的讨论中允许使用排中律，但在涉及无限集合（例如自然数）的情况下，他们通常不接受排中律的使用。在有限数学系统中，对于有界有限特性构造可能性的每一个断言都可以被判断。在这种情况下，应用排中律是被允许的。而对于无限系统，布劳威尔认为我们必须放弃排中律。在直观主义数学中，可以构造许多反对排中律普遍有效性的反例，例如并非无限集合或数列中的所有数都具有性质 E:

[1] van Heijenoort, Jean, editor. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1879–1931. Harvard University Press, 1967, p. 336.

[2] 假定在某个特定的数学系统或理论中，某些问题（如方程或系统）一定是可以被解答的。这个公理通常用于证明数学问题的可解性，尤其是在讨论某些类型的结构（例如代数结构）时。

[3] Brouwer, L. E. J. “Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.” *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 28, 1919, pp. 203–208.

> 在 π 的十进制展开中，是否存在一个数字比其他数字出现得更频繁？在 π 的十进制展开中，是否存在无限多个相邻相等的数字对？[1]

在传统数学中，π的十进制展开被视为一个无理数，它的小数部分无限且不循环的。我们通过计算可以观察到每个数 0-9 的出现频率趋向于相等。但这种结论依赖于排中律的预设：也就是说要么确实存在这样一个数比其他数字出现的频率更高，要么所有数字的出现频率相同。我们需要基于经验统计、概率论推测数字的分布规律。布劳威尔认为，π的十进制展开不是一个已经存在的数学对象，而是一个潜无限的过程，我们只能通过“逐步计算或构造”来获得其性质。因为我们无法在有限步骤内“穷举”π 的所有位数。同样，我们无法断言π展开中一定存在无限多个相邻相等的数字对，除非可以通过一个可计算的过程来构造这些相邻相等的数字对，而不是仅仅基于概率论或排中律推断其存在。数学对象的存在性依赖于我们是否能够构造它们的证明，而不是依赖于经典逻辑中的公理体系。在没有可行的构造证明之前，这个命题就无法被断定为真或假，因此所有涉及无限的数学对象和性质都不能通过排中律来进行有效推导和保证。

6.3 海廷对直觉主义逻辑的数学意向解释

布劳威尔在解释了排中律在无限数学应用中的不可判定与无效性问题之后并没有对直觉主义逻辑进行形式化的系统工作，这项任务由他的学生阿伦德·海廷（Arend Heyting）结合胡塞尔的学生奥斯卡·贝克尔的工作完成。

6.3.1 三值逻辑的意向充实解释

奥斯卡·贝克尔是在其《数学实存》中首先注意到数学命题意义的意向充实问题。[2]他分析了胡塞尔充实（Erfüllung）、失实（Enttäuschung）或既不被充实也不被失实的事态与布劳威尔的被证明为真、被证明为假或既未被证明为真也未被证明为假的判断之间的关联性，尤其是意向性的失实问题与逻辑否定命题的关系。胡塞尔认为失实是一个指向对象的意向在直观的过程中未得到充实，意向与直观不能一致，从而发生争

[1] Brouwer, L. E. J. “De onbetrouwbaarheid der logische principes.” *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, vol. 2, 1908, pp. 152–158.
[2] ME, S. 601-602.

执。[1]例如：

(1) 这本书在桌子上。

(2) 可以看到桌子，但这本书并不在桌子上。

(3) 既没有看到桌子，也没有看到书。

在（1）的情况下，意向与直观在对象的充实中达到了一致。在（2）的情况下，失实在这里意味着桌子是可见的，但书并不在桌子上，也就是说，桌子的存在得到了充实，但关于书本放置在桌上的预期却部分失实。因此，失实是感知行为之中的部分意向的“不充实”，同时也意味着意向的部分实现。确切地说，（1）中的“充实”是一种认同的综合，而（2）的“失实”则是一种区别的综合或冲突的综合。每一个“失实”不仅只是对一个意向的否定，而且还必然同时伴随着一个新的“充实”；例如，对书的“失实”同时也伴随着对桌子意指的“充实”。而在（3）的情况下，不充实则意味着（Nicht-Erfüllung）是一种完全的否定。既没有看到桌子，也没有看到书，这种情境显然不符合意向（Intention）的期待，同时也没有形成真正的争执：我无法进入房间，因此不知道书在桌子上。意向与直观不能一致。但是尽管桌子不存在，房屋的存在仍然符合人们的预期，与意向一致（übereinstimmend）。[2]

从上面的分析中，贝克尔注意到了胡塞尔的充实、失实或既不被充实也不被失实的判断与布劳威尔的被证明为真、被证明为假或既未被证明为真也未被证明为假的断言之间具有关联性的人。贝克尔试用一个三元组 $(P\vee\neg P\vee\neg(P\vee\neg P))$ 来表示一个数学判断 P 可能存在的三种情况：

命题 P 为真。

命题¬P 为真。

$\neg(P\vee\neg P)$：既不是命题 P 为真，也不是命题¬P 为真（即第三种情况）

贝克尔在这里区分了第一层级逻辑与第二层级逻辑。第一层级逻辑是经典二值逻辑，只考虑命题 P 与命题¬P 及其对立，而在第二层级逻辑中则考虑命题自身的存在性：命题 P 是否可以被永久地断定。因此，经典二值逻辑并不总是充分的，真值（True）和假值（False）之外，还可能存在第三种状态（如不确定性、悖论、未定义等），从而有 P 、¬P、$\neg(P\vee\neg P)$。第三种是否定 P 和¬P 的析取，由此拒绝矛盾律的二分性。[3]

但是这里需要注意，贝克尔在解释第三种情况时犯了一个错误，即一个判断既不

1 Hua XIX/2, §11.
2 Hua XIX/2, A513/$B_2$41.
3 ME, S. 650-651.

是当前被充实也不是失实的情况。实际上，贝克尔在表述这种情况时错误地使用了 ¬(P∨¬P) 来表示“既非 P 也非 ¬P”的情况，这在直觉主义逻辑中是不允许的，违反了排中律的使用原则。在直觉主义逻辑中，¬(P∨¬P) 仅表示 (P∨¬P)→⊥，而不是 P∨¬P 所表示的当前未被充实或失实。贝克尔在这里既没有正确表达胡塞尔对这种情况的现象学观点，也没有正确表达布劳威尔的观点。

6.3.2 数学命题的意向充实分析

贝克尔关于数学意向的直观理论影响了海廷（Arend Heyting）。Martin-Löf 指出，“海廷在给出直觉主义解释的逻辑基本概念时，是通过贝克尔受到了胡塞尔的影响”。[1]海廷认为，一个数学命题 p，只有在完成了具有某些特定属性的数学构造之后，才可以被断言，[2]在此基础上，他接受了贝克尔关于命题的证明可以看作是意向的充实的观点：

> 一个句子是对某个命题的断言，一个数学命题表达了一种确定的期望（bestimmte Erwartung）。例如，命题“欧拉常数 C 是有理数”表达了我们能够找到两个整数 a 和 b，使得 C = a/b 的期望。也许“意向”（Intention）这个由现象学家创造的词，能更好地表达这里所说的期望。我也使用“命题”（Aussage）这个词，来指代通过断言在语言上表达的意向。正如我之前所强调的，意向不仅指向一个独立于我们的事态（Sachverhalt），还指向一种被认为是可能的体验（Erlebnis），如上述例子所示。[3]

贝克尔认为，命题“欧拉常数 C 是有理数”传达了我们期望能够找到整数 a 和 b，使得 C = a/b。这种期望是命题本身所包含的意义，但是这里现象学的“意向”概念更为合适。意向不仅指向一个独立于我们之外的事态（即某种真实存在的状态），同时也指向一种可能的体验，这种体验是我们对于数学证明过程的构造和意义充实的过程。在对海廷强调了意向性经验的一个本质特征，即它的客观指向性——指向某物的方式（如判断、想象、感知等）。1934 年 9 月的一封信中，贝克尔让海廷注意到，作为“任务演算的”的直觉主义逻辑意可以通过现象学中的意向概念进行推广（“任务”可以

[1] Martin-Löf, Per. “Truth of a Proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof. ”*Synthese*, vol. 73, no. 3, 1987, p.415.
[2] Heyting. *Intuitionism: An Introduction*. North-Holland, 1956, p. 98.
[3] Heyting. Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis*, vol. 2, 1931, p. 113.

看作是“意向”的一个特殊例子）：

> 这最初似乎是主观的、人类的。但也存在一种“客观的”意向性，胡塞尔称之为“意向相关性”（noematische），通过它可以联系到传统的潜能（potentia） 和现实（actus） 之间的区分。[1]

同时，海廷将否定命题描述为“意向的失实”，他认为在胡塞尔的现象学意义上，意向的失实（而非单纯的不充实）似乎很好地描述了直觉主义逻辑中的否定概念，[2]这种表达方式克服了传统逻辑中排中律非此即彼的二值逻辑。

> 一个逻辑函数是形成一个与给定命题不同的命题的过程。否定就是这种函数；贝克尔遵循胡塞尔，清楚地描述了它的意义。对他而言，否定是绝对积极的，即与原始意向相关的冲突意向。命题“C 不是有理数”意味着，假设 C 是有理数时，我们可以推导出一个矛盾（Widerspruch）。[3]

海廷认为，一个数学命题的否定意味着认知意向与数学命题的原始意向之间的冲突（Widerstreit）。否定作为对认识行为的冲突的包含了两个阶段：首先是事态的意向，其次是在事态中的失实。这种事实恰好描述了布劳威尔在直觉主义逻辑中的否定概念：“当你陈述矛盾时，我只是意识到建构不再进行，所要求的结构无法嵌入给定的基本结构”。[4]布劳威尔认为，否定一个命题是意识到在构造的过程中没有办法继续下去，原本可以用来证明命题的结构无法与已有的基本结构兼容，这与经典逻辑中的“真或假”的对立有本质区别。

在对数学命题的意向的充实与失实的分析之后，海廷提出：一个命题 P 表达的意向行为被充实或可充实（或可实现），当且仅当存在 P 的构造（或证明），具体而言，布劳威尔—海廷—科尔莫哥洛夫（BHK）解释提供了对命题真值的构造性理解，强调命题的真值只有在能够提供构造性证明时才能确定。例如：

(1) 命题 P 被证明为真，意味着这个命题是可充实的（fulfilled）

(2) 命题 P 被证明为假，意味着这个命题是失实的（frustrated）

[1] Van Atten, Mark. The Correspondence between Oskar Becker and Arend Heyting. *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, Fink Verlag, 2005, pp. 25-48.

[2] Heyting. Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis*, vol. 2, 1931, pp. 113-114.

[3] Heyting, 1931, p. 113.

[4] Brouwer. *Collected works I. Philosophy and Foundations of Mathematics*, ed. A. Heyting. North-Holland, Amsterdam, 1975, p.73.

(3) 命题 P 既未被证明为真，也未被证明为假，意味着该命题既非充实的也非失实的，我们也没有通向 P 的充实的和失实的方法。

在此基础上，我们可以从海廷对数学命题的意向分析的角度进一步扩展直觉主义逻辑中的基本运算符：合取、析取、蕴涵和否定：

(1) 合取：$p \wedge q$ 所表达的意向只有在 p 和 q 两者都通过构造而被充实时，合取才是成立的都被充实时完成。

(2) 析取：$p \vee \neg q$，当 p 或 q 中的至少一个得到充实时完成。

(3) 蕴涵：$p \rightarrow q$，当主体能够将任何 p 的构造（证明）转化为 q 的构造（证明）时完成。

(4) 否定：当主体有一个构造能够将任何 p 的证明转化为矛盾的证明时完成。

总的来说，BHK 解释不仅提供了逻辑常量的构造性理解，这种解释与经典逻辑的最大不同在于，直觉主义不接受间接证明，所有的证明都必须是构造性的，数学命题的真值依赖于有效的构造性证据，而非仅仅依赖逻辑推理的抽象规则。这使得排中律（即一个命题要么为真要么为假）在无限集合中是无法应用的。

6.4 外尔论题：形式主义对直觉主义的胜利意味着纯粹现象学的失败吗？

希尔伯特与布劳威尔围绕数学基础，尤其是排中律的数学应用展开了争论，[1]这种关于数学基础的争论最终从直觉主义关切到了现象学。我们在前面已经分析过布劳威尔拒绝在无限集合中使用排中律。希尔伯特从形式主义公理化的立场严厉地批评了布劳威尔对排中律的拒绝：

> 让数学家放弃排中律，就好比禁止天文学家使用望远镜，或禁止拳击手使用拳头。禁止存在性陈述和排中律，就等于完全放弃数学科学。[2]

布劳威尔对此回应道：“形式主义从直觉主义那里获得了无数好处，并可能期待更多的好处。因此，形式主义学派应当对直觉主义表示一定的认可，而不是以嘲讽的语气进行抨击，甚至连作者的署名都不予以适当提及”。[3]在 1927 、1928 年汉堡大学的

[1] 两人关于数学基础的争论都基本通过数学期刊《数学年鉴》展开。希尔伯特担任主编，布劳威尔是其编辑委员会成员。1928 年，希尔伯特重新组建编辑委员会，将布劳威尔排除。

[2] van Heijenoort, Jean, editor. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1879–1931. Harvard University Press, 1967, p. 476.

[3] van Dalen, Dirk. The War of the Frogs and the Mice, or the Crisis of the Mathematische Annalen. *The Mathematical*

数学研讨会上，当希尔伯特再次攻击布劳威尔的观点时，外尔站出来为直觉主义辩护，他批评了希尔伯特的形式化观点，认为形式主义将数学从一个直观后承的系统变成了一个按照固定规则进行的公式游戏，而在数学系统中，一致性是必要但并非充分的条件，[1]并认为形式主义对直觉主义的胜利会最终动摇胡塞尔现象学的纲领：

> 如果希尔伯特的观点胜过直觉主义，这在所有情况下都是如此，那么我在这看到了纯粹现象学哲学立场的决定性失败，而事实似乎如此，那么我认为这就是纯现象学哲学态度的决定性失败，因此，即使在最原始、最容易得到证据的认知领域——数学，这种态度也不足以理解创造性科学。[2]

外尔随后就该问题与贝克尔进行了书信交流和争论，贝克尔对外尔的这种观点进行了反驳：

> 你（外尔）声称形式主义的胜利摧毁了现象学作为哲学基础科学的地位，对此我不敢苟同。另一方面，您可能必须这样判断，因为您可能几乎不了解现象学的最新发展。[3]

贝克尔继续就该问题与胡塞尔与希尔伯特的另一位学生曼科（Dietrich Mahnke）进行了进一步的讨论。曼科认为外尔的这种论点意味着形式主义对现象学方法的挑战：如果外尔认为布劳威尔的直觉主义无法支持理论物理学，那么胡塞尔的“经典”现象学也可能被视为无法保证自然知识的现代形式，并使其完全可理解。[4]我们在这里从形式主义、直觉主义和现象学立场出发，对外尔的论点进行重构：

P1. 如果希尔伯特的形式主义（H）战胜布劳威尔的直觉主义（B），那么布劳威尔的直觉主义（B）不能为经典数学提供基础（¬BB）。

P2.布劳威尔的直觉主义（B）可以等同于现象学的直观构造理论（B≡P）

Intelligencer, vol. 12, no. 4, 1990, pp. 17–31.

[1] van Heijenoort, Jean, editor. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1879–1931. Harvard University Press, 1967, p. 483.

[2] Weyl, Hermann. “Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik.” *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, vol. 6, 1928, pp. 86-88. Reprinted in Weyl, III, 147–49.外尔后来在一篇综述文章的结尾非常简洁地重申了他的观点：“反现象学的构造方法（希尔伯特的方法）的成功是不可否认的”。Cf. Weyl, Hermann. “A Half-Century of Mathematics.” *The American Mathematical Monthly*, vol. 58, no. 8, Oct. 1951, p. 494

[3]关于外尔与贝克尔的讨论可见 Mancosu, Paolo, and Thomas Ryckman. “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence Between O. Becker and H. Weyl.” *Philosophia Mathematica*, vol. 10, 2002, pp. 130-202.

[4] Briefwechsel mit Dietrich Mahnke, Aust Bernd Peter and Sattler Jochen , eds, in Peckhaus Volker, ed., *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, pp. 245–278. 贝克尔在 1926 年 8 月 22 日致曼科的书信中引用了外尔的原话。

P3. 现象学的直观构造理论（P）可以为数学提供基础（PB）。

结论 C: 希尔伯特的形式主义（H）战胜了布劳威尔的直觉主义（B），因此，现象学的直观构造理论（P）不可以为数学提供基础（¬PB）。

因此，若希尔伯特的形式主义战胜布劳威尔的直观主义，则纯粹现象学不足以支持经典数学。我们对 P2 继续分析可得：P2（a）直觉主义的直觉是唯一相关的数学直观形式（即没有其他形式的直观理论可以在哲学上为数学中超出直觉主义数学的部分提供基础），其次 P2（b）胡塞尔的直观理论属于或等同于的直觉主义。

对于 P1，我们在这里不过多地探究形式主义与直观主义之间的数学史意义。直觉主义试图通过拒斥排中律和构造观点重新奠定数学的基础，但这种尝试实际上只是与经典数学并行地建立了一种新的数学体系。[1]我们在第三章已经详细讨论过希尔伯特的元数学及其直观理论基础与现象学的关系：在庞加莱和布劳威尔对希尔伯特的元数学进行批评之后，希尔伯特在元数学中引入了符号构型的直观，希尔伯特形式数学的有效性最终是由元数学的符号构型直观所保证的，希尔伯特和伯奈斯在形式主义发展的过程中将有穷主义一定程度上等同于直觉主义。对于 P1 的反驳我们在第三章已经完成，这里不再展开。

对于 P2，我们已经在本章从直觉主义的数学对象和命题的角度进行了现象学的解释。并且证明了布劳威尔的直觉主义虽然是一种有效的数学方法，但其哲学基础缺少论证。我们从现象学的内时间意识与意向充实理论可以为数学直觉主义提供一个合适的哲学论证基础。

对于 P3，胡塞尔作为一个传统的数学家的立场，因而不得不将直觉主义数学看作是古典数学边缘的一种数学分支。事实上，胡塞尔并不愿舍弃古典数学的任何一部分。他在著作中多次谈到排中律原则，但从未以拒斥的方式。[2]胡塞尔认为现象学作为超越论的科学最终为数学奠定哲学基础。在他为《大英百科全书》所撰写的文章中，胡塞尔明确指出，对于那些在现象学框架下建立的先验学科（例如数学），并不存在“悖论”或“基础危机”的问题。[3]我们将在论文的最后两章通过现象学的意向迭代与视域层级理论构造包括康托尔的超限数。在这里，我们首先通过论证胡塞尔在超越论逻辑中提出的三层逻辑结构及其相关的明证性可以兼容布劳威尔的直觉主义逻辑与希尔伯特的形式逻辑，对外尔论题的形式主义对直觉主义的胜利意味着纯粹现象学的失败进

[1] Toader, Iulian D. “Why Did Weyl Think that Formalism’s Victory Against Intuitionism Entails a Defeat of Pure Phenomenology?” *History and Philosophy of Logic*, vol. 35, no. 2, 2014, pp. 198-208.

[2] Hua XVII, S. 96.

[3] Hua IX, S. 297.大英百科全书第四版关于现象学的词条。

行彻底的反驳。

6.5 胡塞尔的一致性与真理逻辑对形式主义与直觉主义逻辑的兼容性

胡塞尔在《形式逻辑与超越论逻辑》中区分了三个逻辑层次：纯粹语法、一致性（无矛盾性）逻辑和真理逻辑，这三层逻辑可以分别对应于数学哲学中数学符号及其表达的形式层面、数学推理的结构层面、数学命题之真的层面。

其中，在数学符号及其表达的形式层面对应于胡塞尔的纯粹逻辑语法学，它研究命题如何通过语法运算符（例如析取、合取、蕴涵）将意义单位（如主词、谓词、连词）组合成统一的意义整体，从而排除无意义的表达："绿色是或者"违反纯粹语法，因其缺乏合法的意义联结形式。[1]

我们接下来将在一致性逻辑和真理逻辑的层面来讨论胡塞尔对布劳威尔的直觉主义逻辑和希尔伯特的形式主义逻辑的兼容性：在超越论逻辑中，直觉主义是按照真理逻辑进行的，而形式主义则按照后承逻辑进行的。

6.5.1 一致性逻辑与形式主义的无矛盾性证明

在纯粹分析学中，胡塞尔将传统形式逻辑界定为超越论逻辑的第二层级，主要内容是推理形式或命题形式的分析蕴涵，其特征是无矛盾性（或一致性），即逻辑体系中不存在命题 A 与其否定 ¬A 同时可证。[2]这种无矛盾性（一致性）是形式化公理系统的第一个性质。公理系统的第二个性质是公理的独立性，意味着一个公理不能通过其他公理进行分析推导。公理系统的第三个性质是完备性，意味着系统内所有命题可判定，胡塞尔将其定义为限定的流形。我们在第二章已经详细分析过胡塞尔的相对和绝对限定的流形论与希尔伯特的完备性问题。限定流形规定该领域内的任何命题要么基于该领域的公理为真，要么与公理矛盾而为假。贝克尔在《形式逻辑与超越论逻辑》中指出，胡塞尔使用"无矛盾性""相容性"及"一致性"等术语时，可能因表达方式的不同而导致概念上的混淆。在贝克尔的提醒下，胡塞尔对一致性的概念做了广义和狭义的区分。广义的一致性其中既包含在分析学的必然 推论的严格意义上的逻辑一致性，也包括在所谓偶然的、时间性序列内统一性意义上的一致性。包含分析学推论必然性的逻辑一致性，其中涉及判断间在"矛盾性"或"彼此无关联"意义上的相容

[1] Hua XVII, S.55-57;64-65.
[2] Hua XVII, § 14.

性。狭义的一致性专指逻辑学意义上的一致性，强调判断的形式必然性，确保逻辑体系内部没有矛盾，维持判断的逻辑连贯性。无矛盾性和一致性原则具有规范性功能，指导判断的形成与检验，确保逻辑体系的稳健性。[1]

一致性逻辑是纯粹句法的，这种句法定义忽略了数学对象的存在和性质相关的语义问题。希尔伯特主张数学研究的核心在于对象之间的关系，而非对象本身的具体性质，“人们必须在任何时候都能够用桌子、椅子、啤酒杯这样的词来替换点、线、面这些词”，[2]希尔伯特的一致性逻辑并不针对具体的对象，因为这些对象必须通过系统以定义的方式给出，因此是某种意义上系统的“现象”。它只涉及“法则性”（Gesetztheiten），这些法则性仅仅具有规定性，贝克尔将它们比作棋盘上的棋子，其存在完全依赖于它们在游戏中的功能，这种游戏建立在简单的计算约定上。在这个意义上，贝克尔认为超限集合同样是法则性的，它们在形式上具有一致性，但它们无法在胡塞尔的形式—本体论中通过范畴直观被把握：这种一致性在内容上也没有任何意义。

> 因为超限公理的对象，即超限集合，根本无法在形式—本体论的可能性意义上进行思考；它们无法通过范畴直观而被洞察（erschaubar），而仅仅是空洞的法则性。它们无论如何都无法成为现实。事实上，即使“一致性”在形式上是完整的，它在内容上也没有任何意义；特别是，它不意味着形式—本体论可给予性的必要条件。形式本体论的可给予物当然不能表现出任何矛盾，但首要的是它们必须包含可以在形式—本体论范畴中把握的东西——而超限集合做不到这一点。[3]

从超越论现象学的角度而言，第二层级的一致性逻辑类型的构造不再属于胡寒尔的“形式本体论”而属于“矛盾的规律性”的范畴，在这个范畴中没有直观对象的认之为“真”，只有“后承”（Konsequenz ）。形式一致性并不能保证对象在形式本体论中的可给予性。超限元素是通过类比有限集合的定律获得的，而当它以内容方式解释时，超限公理预设了实无限集合的给予，但它不能在形式本体论范畴中把握。我们无法通过有限的步骤或规则来完全构造或描述实无限集。例如，实数集合 R 是一个不

[1] Hua XVII, S. 295-297.
[2] 这段文字虽然常常被引用来说明希尔伯特的形式主义观点，但在希尔伯特本人的著作中并没有严格的出处依据，实际上来自希尔伯特与数学家奥托·布卢门塔尔（Otto Blumenthal）的一次对话。Cf. Gottfried Gabriel et al., eds.,*Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges* (Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1980), S. 13.
[3] ME, S. 515-516.

可数的无限集，其基数大于自然数集合的基数。这种不可数性使得在形式—本体论中对其进行完全把握变得不可能。胡塞尔认为这种无矛盾性逻辑除了直接或间接的一致性和不一致性之外，不可能再关注其它的认识论论题，一致性就是数学“存在”的一切问题。[1]

6.5.2 真理逻辑与直觉主义的构造逻辑

胡塞尔认为，在一致性逻辑中，命题要么是真的，要么是假的，这种一致性独立于主体的认识和构造能力。然而，在真理逻辑中，真实性不仅仅取决于逻辑一致性，而且要求命题与事物本身相符，即命题必须与证明的意向关联相一致。相应地，我们从数学命题的真和假过渡到与事物本身的相合和不相合。胡塞尔将数学家追求的这种一致性逻辑描述为“可能与他们的判断相对应的客观事物的可能存在”的漠视，由此认为数学不足以充当哲学的思想范式。数学的工作仅仅停留在“不矛盾性”的逻辑层面，而真理逻辑则满足认识论的兴趣，不再将自身封闭在思维游戏或符号游戏中的非矛盾性和分析演绎能力。相反，我们不再只面对纯粹演绎的数学作为一个受规则指导的符号游戏，而是面对一种应用数学。[2]这有两个方面的意义：一方面，基于对形式理论的解释要求，也就是给予所谓的公理系统一个模型（即满足该理论空乏形式的一系列理想对象领域）；另一方面，基于将数学应用于对世界的认知的外在要求，例如用于确定自然规律的物理学，而获得实在性意义。

因此，在这一逻辑层面上，我们可以将范畴构造解释为直觉主义的构造意义。其中包含两个要素：对命题的有效证明的要求，以及对观念性的有效构造。如果无法有效证明该定理或其否定的真实性，那么该命题就可能是无法判定的。[3]它提出了一个问题，即是否能够确保所有逻辑原则都可以通过一系列可行的构造和证明步骤来验证。这种质疑对绝对有效性的逻辑原则提出了挑战，它表明逻辑原则的形式上的正确性无法保证构造上的有效性。因此，在真理逻辑中，逻辑原则并不是范畴性构造的准则；相反，我们需要有一系列有限的证明步骤来确立一个命题的真假以及所涵盖的对象的存在。因此，可构造性与有效证明相互关联。它们被理解为一系列主观行为的顺序。尽管在后承逻辑，“真”可能仅指从公理形式推导出的结论（假设形式系统一致），

[1] Hua XVII, S. 125.
[2] Hua XVII, S. 113-115.
[3] Becker, Oscar. Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendung. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, vol. 6, edited by Edmund Husserl, Max Niemeyer Verlag, 1923, S. 26.

但这样的真的概念依旧限于逻辑的第二层面。真理逻辑更关注于明证性、直观及数学意向的重新，从而指出真理的认证超越了纯符号理论中的形式推导，需基于直观和明证性。海廷在此基础上认为：一个命题 S 表达的意向行为被充实或可充实（或可实现），当且仅当存在 S 的构造（或证明）。在这个框架下，一个表达式必须首先语法上正确，然后逻辑上一致，最终在可构造和可证明上为真。

6.5.3 一致性逻辑与真理逻辑中的范畴直观问题

布劳威尔和胡塞尔都反对在逻辑上首先假定数学对象的存在，而不是从意识中进行有效性构造。贝克尔进一步指出了对直观主义和形式主义在胡塞尔形式本体论中的区别：

> 基本区别在于，真理逻辑与形式本体论性质的事态有关，并力求直观地（当然是范畴上的）洞察这些事实本身，即在它们原初的给予性中把握它们[…]。相反，“后承逻辑”（以及希尔伯特的数学——但不包括他的元数学！）严格来说并不指向对象（这些对象确实必须以某种方式可及的，以某种方式成为现象），而是指向的仅仅是法则性（Gesetztheiten）的元素，它们的内在结构是完全无法理解的。[1]

我们在第 3 章已经讨论了数学对象的范畴直观问题，我们在这里仅仅分析数学对象中复数与超限数分别在一致性逻辑与真理逻辑层面的范畴直观问题。

贝克尔通过分析理想元素在希尔伯特基础方法中的作用，阐明了为什么希尔伯特的形式数学不能在直观中得到充实。他区分了理想元素的复数元素和希尔伯特形式系统中康托尔超限数。高斯认为复数是“最具直观性的可感知化”，复数通过实数对的集合，能够同构地映射到二维欧几里得平面上，使得复数的运算（如加法和乘法）可以通过几何变换（如平移、旋转和拉伸）直观地表现出来。这种同构性使得复数不仅是抽象的数学概念，还具备具体的几何解释，相比之下，希尔伯特的符号体系被指出完全不具备同构性。所谓同构性，是指两个结构之间存在一一对应的映射，使得它们的结构性质完全对应。复数通过几何解释最终在直观中得到了充实，从而被证明它既是一致的又能被范畴直观。然而，对于希尔伯特的超限公理，情况就有所不同。在希尔伯特的体系中，符号操作缺乏这种直观的几何对应关系，导致其符号操作虽然形式

[1] ME, S. 509.

上可理解，但在本质上缺乏具体的、可视化的解释。比如，关于连续统假设超限陈述：$2^{\aleph_0}=\aleph_1$，在这里是一个“拟陈述”（Quasi-Aussage），即一种观念上的陈述，缺乏实质内容，无法通过直观的映射来理解其深层含义。符号和公式的意义并不依赖于它们与外部世界的对应关系，而是依赖于它们在系统内部的逻辑关系和推导规则。这种“拟陈述”可能是一种形式上的构造，用于在系统中进行逻辑操作，而不需要具备直观的解释，证明的有效性不再依赖于我们对数学对象的直观理解，而是依赖于形式系统中的逻辑规则。希尔伯特的符号体系在保证无矛盾性（即系统内部不产生矛盾）的同时，并不需要依赖于与直观对象的同构映射，从而使得其证明过程与直观脱节。

6.6 本章小结

本章论述了布劳威尔对潜无限的接受和对排中律的拒斥，并进一步分析了贝克尔关于胡塞尔意向理论中充实、失实、既不被充实也不被失实的事态与布劳威尔的被证明为真、被证明为假、既未被证明为真也未被证明为假的命题判断之间的对应关系。布劳威尔的学生海廷在直觉主义的形式化逻辑（BHK 解释）命题中，通过贝克尔接受和发展了数学命题的意向充实理论。本章最后分析了胡塞尔的超越论逻辑中真理逻辑和一致性逻辑对形式主义逻辑和直觉主义逻辑的兼容性，直觉主义按照真理逻辑进行，形式主义按照后承逻辑进行，超越论的不同逻辑层次结构决定了数学对象不同的构造类型和明证性，这些分析揭示了为什么胡塞尔的立场有时被归属于希尔伯特的形式主义，有时被归属于布劳尔的直觉主义，为更广义的数学直觉主义和形式主义之间关于数学本体论的争议提供一种现象学的解释方案，同时反驳了外尔关于形式主义对直觉主义的胜利意味着现象学哲学的失败的论题。我们将在下一章通过反思的意向性迭代和视域层级结构对康托尔的超限数进行超越论现象学的构造解释。这种构造解释将对外尔的论题进行更加彻底的反驳。

第 7 章 数学对象的超越论构造

超限数的意向性迭代与视域层级解释

没有人能把我们从康托尔为我们创造的天堂里驱逐出去。[1]

——希尔伯特

因此，我对超限过程进行客观解释的努力旨在发展康托尔伟大思想的本体论特性。这在我看来是一个极其重要的哲学问题。[2]

——贝克尔

7.1 引言

根据贝克尔的观点，直觉主义（构造作为数学存在的保证）和形式主义（非矛盾作为数学存在的保证）定义之间的争议问题必须通过现象学的方法来解决。直觉主义者主张，数学对象的存在性必须通过意识活动与构造来证明，即只有当我们能够在时间性的具体的构造中展现某个数学对象时，才能断言其存在。相反，形式主义者则认为，在元数学的符号构型的直观基础上，只要一个数学公理体系是无矛盾和一致的，公理系统所定义的数学对象就可以被视为是存在的。通过借助胡塞尔现象学中意向性的迭代和视域层级对超限数的构造，贝克尔拒绝了希尔伯特对康托尔超限数的数学辩护，而是从布劳威尔基于潜无限的直觉主义出发，尝试通过胡塞尔现象学的意向构造为康托尔的超限数进行本体论的辩护，从而为从形式系统到直观构造的数学对象的存在争议问题提供现象学的解决方案。

7.2 贝克尔的数学现象学研究

在所有对现象学的数学认识论感兴趣的现象学家之中：莫里茨·盖格尔（Moritz Geiger）、亚历山大·柯瓦雷（Alexandre Koyré）、费利克斯·考夫曼（Felix Kaufmann）和迪特里希·曼科（Dietrich Mahnke）以及汉斯·利普斯（Hans Lipps），奥斯卡·贝克尔

[1] Hilbert, David. “Über das Unendliche.” *Mathematische Annalen*, vol. 95, 1926, p. 170.

[2] 贝克尔1926年8月16日写给外尔的书信。Cf. Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl.” *Philosophia Mathematica* (3), vol. 10, 2002, p. 187.

（1889-1964）在数学和物理学方面的知识最为丰富。他是从数学领域进入现象学研究。在 1930 年写给希尔伯特的一封信中，贝克尔提到了他在弗莱堡大学的数学学习经历：

> 我在莱比锡跟随霍尔德（Hölder）和赫尔格洛茨（Herglotz）学习了 12 个学期的数学，并在这一领域完成了一篇关于公理化几何的论文，[1]获得了博士学位（1914 年）。经过四年的军旅生涯后，我转向了哲学，并于 1922 年在胡塞尔的指导下在这里完成了我的教授资格论文。即使在最近几年，我也经常与数学家们进行书信和面对面的交流，其中包括您圈子内的一些成员（如阿克曼和冯·诺依曼），此外还有赫尔曼·外尔，并且在这里，我也经常与策梅洛交流，我甚至在他的研讨会上多次讲授有关超限序数理论的问题。[2]

贝克尔于 1923 年完成任教资格考试之后接替海德格尔成为胡塞尔的计划内助手，他从 1928 年到 1930 年之间一直是胡塞尔《现象学年刊》的编辑委员会成员。实际上自从成为胡塞尔的助手以来，他就已经非正式地担任了编辑工作。[3]他和兰德格雷贝后来成为胡塞尔在弗莱堡时期除海德格尔和芬克之外的两位最重要的助手。贝克尔于 1928 年在弗莱堡晋升为特聘教授，并在那里一直工作到 1931 年，随后他在波恩大学拥有了哲学教席。贝克尔的工作主要集中于对物理学基础和数学基础的现象学分析。除了与希尔伯特的学术交流，贝克尔还与当时的多位数学家和物理学家有过通信。这个名单包括：威廉·阿克曼（Wilhelm Ackermann）、阿伦德·海廷（Arend Heyting）[4]、大卫·希尔伯特（David Hilbert）、费利克斯·考夫曼（Felix Kaufmann）[5]、冯·诺依曼（J. von

[1] 这篇论文写于 1914 年，题为《基于平面连接和排序公理的多边形分解为异或三角形的研究》。

[2] 希尔伯特和贝克尔的通信包含贝克尔写给希尔伯特的一封信和希尔伯特回复的部分草稿。这封信保存在哥廷根大学图书馆，编号为 Cod Ms Hilbert 457。贝克尔给希尔伯特的信的日期是 1930 年 10 月 4 日（6 页）。关于希尔伯特和贝克尔的书信交流，Cf. Roetti, J. A. El finitismo matemático de Hilbert y la crítica de Oskar Becker. *Revista de Filosofía (Argentina)*, vol. 11, 1996, pp. 3–20.

[3] 倪梁康：《现象学的数学哲学与现象学的模态逻辑——从胡塞尔与贝克尔的思想关联来看》，《学术月刊》2017 年第 49 卷第 1 期。

[4] 贝克尔与海廷的信件保存在哈勒姆的国家档案馆里。总共有六封。贝克尔写给海廷的 5 封信和海廷写给贝克尔的 1 封信（草稿）。参见 Van Atten, Mark. The Correspondence between Oskar Becker and Arend Heyting. *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, Wilhelm Fink Verlag, 2005, pp. 119–142.

[5] 费利克斯·考夫曼与贝克尔之间的通信保存在费利克斯·考夫曼遗产档案（Konstanz）的一个名为"数学通信"（Mathematische Korrespondenz）的文件中。文件包含 6 封信件，其中 5 封是贝克尔写给考夫曼的，另一封是考夫曼写给贝克尔的：

(1) 贝克尔写给考夫曼，1928 年 12 月 31 日；2 页；编号 006198-006199。
(2) 贝克尔写给考夫曼，1929 年 3 月 25 日；2 页；编号 006191-006192。
(3) 贝克尔写给考夫曼，1929 年 7 月 12 日；2 页；编号 006178-006179。
(4) 考夫曼写给贝克尔，1929 年 7 月 22 日；2 页；编号 006174-006175。
(5) 贝克尔写给考夫曼，1929 年 7 月 30 日；1 页；编号 006173。
(6) 贝克尔写给考夫曼，1930 年 3 月 8 日； 6 页；编号 006127-006132。

Neumann）、汉斯·赖欣巴赫（Hans Reichenbach）[1]、迪特里希·曼克（Dietrich Mahnke）[2]、亚伯拉罕·弗伦克尔（Abraham Fraenkel）、赫尔曼·外尔（Hermann Weyl）以及恩斯特·策梅洛（Ernst Zermelo）[3]，其中大部分的通信材料都在战争期间被毁坏失落。贝克尔在他的教职论文《几何学及其物理应用的现象学基础研究》（1923 年）和其著作《数学实存：数学现象的逻辑与本体论研究》（1973 年）中出色地完成了现象学的数学认识论研究。[4]在对贝克尔的教职论文进行基本的介绍之后，我们将重点分析贝克尔在《数学实存》中对形式主义-直觉主义的数学基础争论问题给出的现象学解决方案。

贝克尔在弗赖堡大学由胡塞尔的监督下完成了他的教职论文《物理学的现象学基础及其应用研究》。这本书完全遵循了胡塞尔超越论现象学的方法和术语框架，其中大量引用了胡塞尔《观念》第一卷的内容，以及当时未发表的《观念》第二卷的手稿和讲稿。从这个角度来看，贝克尔的《物理学的现象学基础及其应用研究》可以被视为是《年刊》前一卷（第 5 卷）中埃迪·施泰茵《心理学和精神科学的哲学基础研究》的补充。[5]因为施泰因编辑了胡塞尔在《观念》第二卷中关于自然科学和精神科学前提研究的手稿，因此为贝克尔的分析奠定了基础。在他给外尔的第一封信中，贝克尔基于当时的现象学谱系对自己的思想立场进行了定位：

这里重要的是，我的哲学起点（与弗莱堡现象学方向一致，与慕尼黑—科隆方向相反）是超越论观念主义的原则，由此产生了自然的现象学构造的基本问题。同样的观念主义立场也构成了您的

[1] 赖兴巴赫与奥斯卡·贝克尔之间的通信，从 1928 持续至 1931 年间，目前由 A.Kamlah 编辑，收录于赖兴巴赫的全集中。信件共有 11 封，其中 7 封是贝克尔写给赖兴巴赫的信，另外 4 封则是赖兴巴赫写给贝克尔的。这些通信保存在匹兹堡大学图书馆特藏部的赖兴巴赫遗稿中(并且在康斯坦茨大学有微缩胶卷可供查阅)。我们要感谢 Brigitte Uhlemann 博士（康斯坦茨大学），她在复印贝克尔-赖兴巴赫通信方面提供了帮助。关于贝克尔与赖兴巴赫在几何学基础上的辩论，Cf. Volkert, Klaus. Zur Rolle der Anschauung in mathematischen Grundlagenfragen: Die Kontroverse zwischen Hans Reichenbach und Oskar Becker über die Apriorität der euklidischen Geometrie. In *Hans Reichenbach und die Berliner* Gruppe, edited by L. Danneberg et al., Vieweg Verlag, 1994, pp. 275–294.

[2] 曼科与贝克尔的书信的具体内容可参见 Becker, Oskar. “Briefwechsel mit Dietrich Mahnke.” *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, Wilhelm Fink Verlag, 2005.

[3] 由于奥斯卡·贝克尔和恩斯特·策梅洛都在弗莱堡工作，他们之间并不需要通过书信交流。然而，在弗莱堡的策梅洛遗稿中，确实存在一封贝克尔写给策梅洛的信。这封信长达七页，写于弗莱堡，日期为 1930 年 12 月 31 日。以上诸人之间的通信资料皆引自 Paolo mancosu, T. A. Ryckman, “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl”, *Philosophia Mathematica*, Volume 10, Issue 2, June 2002, Pages 130–202.

[4] Becker, Oscar. Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendung. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, vol. 6, edited by Edmund Husserl, Max Niemeyer Verlag, 1923.Partially translated in T. Kisiel andJ. Kockelmans, *Phenomenology and Natural Science*, Northwestern University Press, 1975.后文简引为 BG。

[5] Stein, Edith. Beiträge zur philosophischen Begründung der Psychologie und der Geisteswissenschaften. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, vol. 5, edited by Edmund Husserl, Max Niemeyer Verlag, 1922, pp. 1–284.

连续统理论和“纯微分几何学”的背景。[1]

超越论观念主义原则是胡塞尔当时最新研究的基本出发点。根据这一原则，贝克尔认为现象学的真正任务在于进行纯粹意识中所有本体论本质的超越论构造：

> 根据超越论观念主义的基本原则，对象和事态只有在纯粹意识中以特定的以其相关的明证性的类型等级显现时，我们才能使一个对象“是”或者事态是“成立的”。一切事物都通过“超越论”在纯粹意识中的构造，现实只是通过理性动机的“现实的主题化”（Wirklichkeitsthesen）而存在于其中。[2]

贝克尔认为，谈论在根本上无法为意识所及的实在是一种教条主义。他试图为欧几里得几何学提供一个超越论的先天基础，即在现象学的意义上，在实际空间的感性直观几何学的基础上，从较低层次的空间直观和前空间直观形式开始逐步构造几何学。贝克尔声称以这种方式可以解释几何学的双重性质，即它既与纯粹理性相关，又与感性世界相关。胡塞尔认为，贝克尔的研究不仅深化了外尔和布劳威尔的思想，还以现象学的方式证明了科学理论的可理解性，展示了现象学在数学哲学和自然科学中的重要地位。贝克尔在这部早期的教授资格论文中完全运用了胡塞尔构造现象学，胡塞尔对这一成果印象深刻，他认为贝克尔是可以将与他关于自然构造的新研究（这些研究现在构成了《观念》第二卷）结合起来的哲学家，他将贝克尔的这部著作描述为“爱因斯坦和外尔的发现与他自己的自然现象学研究的综合。”

早在 20 世纪 20 年代初，胡塞尔就致信外尔，对贝克尔的布劳威尔式的数学直观和认识构造性表示认同，他认为这种观念在现象学的视野下展现了数学的原初意义和逻辑根源。

> 贝克尔博士已经完成并提交到系里的任教资格论文表明，我的弗莱堡圈子对您的研究有多么浓厚的兴趣。我已经深入研究了他的论文并给出了高度认可的评语。它差不多就是对爱因斯坦的观点和您的发现以及我的自然现象学研究的一次综合[…]贝克尔博士在他论文的第一部分也认识到有必要探讨如何把模糊的经验被给予性进行理论化的基本问题，讨论其模糊的连续性，并勾勒出一门关于连续

[1] 贝克尔致外尔，1923 年 4 月 12 日。Cf. Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. “Geometry, Physics and Phenomenology: Four Letters of O. Becker to H. Weyl.” In *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, Wilhelm Fink Verlag, 2005, p. 211.

[2] BG, S. 394.

> 统的构造理论，该理论试图通过极限和近似的方法对模糊连续统进行理性把握。他在这里也试图证明，只有布劳威尔—外尔的理论是唯一符合构造性现象学根源研究的明确和必要要求的理论。正如科朗（Courant）写信给我说的那样，希尔伯特也以一种新的方式设计了数学的基础——“完全符合现象学精神”！[1]

胡塞尔认为贝克尔以现象学的方法进一步发展了外尔的无穷小几何思想，试图通过阐述和补充外尔的研究，为爱因斯坦理论提供更坚实的哲学基础。这是一项深刻的综合工作，既连接了外尔的数学思想，又揭示了自然界“结构法则性”的现象学根源。这种法则性强调自然现象的内在结构，而非单纯的因果关系，为科学理论的可理解性提供了一个超越论的构造依据。同时，贝克尔试图通过极限和近似的方法，以现象学方式理解布劳威尔直觉主义中的核心思想，尤其是连续统的构造理论。贝克尔的这种处理方式展现了布劳威尔理论的现象学可能性，即数学直觉主义对于具体数学对象的构造过程可以通过现象学直观明晰其意向认识的根源，提供严格的哲学基础。通过胡塞尔的推荐，外尔对贝克尔的《物理学的现象学基础及其应用研究》表示赞赏，但他很快就与贝克尔在其《数学实存》中海德格尔的诠释立场和超限数的构造的意见分歧而陷入争论。

7.3 超越论的意向性迭代与视域层级构造

在讨论过数学中生成潜无限的迭代操作后，胡塞尔在《观念 I》的第 100-101 节讨论了意识行为中意向性的层级关系和嵌套结构，特别是每一个层级特性（Stufencharakteristiken）以及贯穿于其中的反思（Reflexionen）迭代。

> 在所有包含迭代的当下化变异（iterierte Vergegenwärtigungsmodifikationen）的层级结构中，显然会构成与层级相对应的意向对象。在第二层级的映射意识中，一个“图像”本身就具有第二层级图像的特性，即一个图像的图像。当我们回忆起昨天是如何回忆一段儿时的体验时，这个意向对象“儿时的体验”本身就具有作为第二层级中被回忆事物的特性。总之：每个意向对象的层级都有其层级特性，它作为一种标识，凡具有该标识特性的东西都显示为属于该层级——不论它是不是一个

[1] 胡塞尔致外尔，1922 年 4 月 9 日，参见 Brief.VII, S.293-295.引文参照了倪梁康：《二十世纪数学基础论争中的现象学——从胡塞尔、贝克尔与外尔的思想关联来看》，《中山大学学报（社会科学版）》，2016 年第 56 卷第 4 期。

原初对象或者还是在某种反思目光中的对象。因为在每个层级中都包含可能的反思（Reflexionen），例如，对于在第二层级的被回忆的事物，我们可以对属于同一层级的（即在第二层次被当下化的）这些事物的感知进行反思。[1]

胡塞尔认为，意向性可以在意识层级中以特有的方式层层递进和嵌套。有简单的当下化（Vergegenwärtigung），即对感知的首次变样。但也有第二、第三乃至本质上任意层级的当下化，在一个当下化中出现另一个当下化，意识中表象的各种类型都可以形成新的层级，每个层级都有区别于其他层级的特性。例如：

第一层级（v_1）：初始的感知“我在昨晚吃了晚餐”。

第二层级（v_2）：“我记得我昨晚吃了晚餐”。这里，$v_2 = f(v_1)$，即第二层级的记忆是对第一层级初始感知的当下化变异。

第三层级（v_3）：在记忆中再次回忆这次记忆，这是一种对记忆的记忆。我们可以说：“我记得我曾记得我昨晚吃了晚餐。”这里，$v_3 = f(v_2))$，即第三层级的记忆是对第二层级记忆的变异。在第三层级的记忆中，我们不仅记住了某个事件的内容，还记住了“记住”的这个行为本身。

这个结构中，我们可以看到观念 v_1（初始感知）经过变异形成了 v_2、v_3，并且可以无限地持续下去：$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \cdots$，每一层级的记忆都包含对上一个层级的反思：每一个新的层级都是对上一个层级的进一步变异，由此形成了一个递归嵌套的意识结构：$v_n+1=f（v_n）$，f 表示反思或记忆行为。

首先，在意识的每一个层级中，都蕴含着进一步反思的可能性。例如，当我们回忆一个过去的事件时，我们处于一个反思的层级。但我们可以继续反思这个回忆本身，进入一个新的反思层级。在这个新的层级中，原来的回忆成为了反思的对象。这个过程可以不断迭代，每一次反思都会产生一个新的意识层级，而前一个层级的反思对象会成为新层级的意识对象。反思的目光穿过层级序列中的诸意识对象，直到最后一个层级的对象，它不再穿过而是固定在这个对象上，也可以在不同层级间穿行，不一定穿过所有的层级，而是固定指向每一层级中的所给予物。反思的迭代过程本质上是无限开放的。每一次反思都会打开一个新的意识领域，成为新的进一步反思的出发点。这意味着，意识的层级结构并不是预先给定的，而是在反思的过程中不断生成和展开

[1] Hua III/1, S. 236.

的，是一个敞开的无限延伸的视域，也就是胡塞尔所说的“反思的变化可能性”。除了简单的记忆嵌套，我们还可以通过更复杂的反思和层次关系来构造更丰富的意识体验。例如，在某些情况下，反思的过程本身可能涉及到多个层次的对象，不仅仅是记忆，还有感知、期待、幻想等。

7.4 贝克尔对康托尔超限数的超越论构造

根据胡塞尔超越论现象学的构造原则：每一个超越的认识的对象都必须在意识中有其内在的构造。贝克尔在其《数学实存》中将这一原则也进一步反正为可达性原则（Zugangsprinzip），其表述如下：

> 对每一个对象性（Gegenständlichkeit）来说，原则上（即不考虑“技术”上的复杂性）都有一种可通达的方法。[1]

在胡塞尔关于自然数的意向性迭代的基础上，贝克尔将这种理论扩展到了超限层次。他认为，康托尔在数学中的后继序数和超限序数的构造，可以看作是意识中反思的迭代过程，但迄今为止这些困难在数学上仍未得到解决。具体来说，他将反思的迭代作为康托尔后继序数的现象学类比，将胡塞尔的“视域现象”作为产生极限序数的类比，并试图将第二数类的大部分建立在“意识的超限结构复杂性”之上，同时声称希尔伯特在建立他的序数变量类型时隐含地诉诸了“意向性结构嵌套”的现象，展显超限数可以在意识中作为现象给予。他拒绝实无限集合的可及性，旨在通过与潜无穷相关的具体现象学经验来为超限序数提供基础，将超限概念将通过诉诸潜无限来证成。因此，在探讨康托尔的超限数（transfinite numbers）的意向性构造时，我们不仅需要理解数学中的“无限”的概念，还需要将这一概念与意识的反思迭代过程进行对比。[2]

7.4.1 超限序数的构造阶段：两个生成性原则

胡塞尔的朋友和同事康托尔在 19 世纪末提出了超限数的概念，用于区分不同类型的无穷集合的大小。在康托尔之前，人们普遍认为无穷是一个整体的、无法区分的概念，但康托尔通过构建集合之间的双射（即一一对应）关系，证明了无穷并不是一个

[1] ME, S. 502.

[2] 这一观点的详细论述可参见 ME, S. 538-541;792-794.以及 Becker, Oskar. Briefwechsel mit Dietrich Mahnke. *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, herausgegeben von Bernd Peter Aust und Jochen Sattler, Wilhelm Fink Verlag, pp. 251-255.

单一的概念，而是有着复杂的不同的层级。[1]例如，他证明了自然数集的基数“$\aleph_0$”（可数无穷）要小于实数集的基数“$2^{\aleph_0}$”（不可数无穷）。其中阿列夫$\aleph_0$是第一个超限基数，而“ω”是第一个超限序数，它代表了自然数之后的第一个无穷序数。康托尔对于超限序数的构造是基于以下两个生成（Erzeugungsprinzipien）原则：

（1）如果α是一个序数，那么就有一个新的序数α+1，它是α的直接后继；

（2）给定任何递增序数的无尽序列，都有一个新的序数跟在它们所有之后作为它们的“极限”。

第一生成原则是自然数的生成原则，也就是胡塞尔前面讨论过的自然数的潜无限的“如此等等”的基本模式。首先，我们可以从自然数序数构造一个递增序列，如 0,1,2,3，显然该潜无限的自然数序列是严格递增的，且没有最大元素。由于该序列没有最大值，我们可以定义其极限为最小的无穷序数，记作 ω，即比该序列中所有元素都大的最小序数。在这一过程中，康托尔把ω看成自然数的一个永远达不到的极限，利用递增序列的无穷性质，将其极限值定义为新的数学对象，也就是第二生成原则。并且“用符号 ω 替换了此前文章中使用的符号 ，因为∞常常用于表达不确定的无限概念，而此处的 ω有明确的数学意义。”[2] 极限序数的构造是序数理论中定义超限数的基础步骤。ω是紧跟在整个自然数序列之后的第一个数，称为第一个超穷数。新的极限值的定义基于以下基本思想：对于一个递增序列，如果序列中的每个元素都小于后一个元素且该序列没有最大值，那么可以通过一个新的极限值来描述该序列的“极限”，该极限值为比该序列中所有元素都大的最小序数。在此基础上，从ω出发运用第一生成原则构造更为复杂的递增序列。例如，从ω开始的序列为 ω,ω+1,ω+2，由于该序列也没有最大值，其极限可以定义为$\omega\cdot 2$；进一步类似地，对于序列 $\omega,\omega\cdot 2,\omega\cdot 3$，其极限为$\omega^2$；对于序列 $\omega,\omega^2,\omega^3,\ldots$ ，其极限则为ω^ω。通过这种递增序列与极限定义的方式，可以逐步构造出更高阶的第二数类中的第二种序数，例如 ω^ω，ω^{ω^ω}，$\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$ ，… 。因此，康托尔认为，我们可以在这两种原则的共同作用下定义出新的、突破有限数的无限数，可

[1] 康托尔通过对角线的构造证明方法证明实数的集合无法用自然数集合来一一对应，从而证明实数的集合是不可数的，详细可参见 Cantor, Georg.“Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.” *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 1, 1891, pp. 75-78.

[2] 进一步的内容可参见 Cantor, Georg. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Teubner, 1883. pp.32-33.我们在这里不讨论康托尔的第三原则，即所谓的“限制原则”（Hemmungs- oder Beschränkungsprinzip）。该原则通过在无限生成过程中施加某种连续性限制，最终得到了一系列确定的无限整数，这些整数形成了不同的整数类。

以逐步递增地构造出无穷多的超限序数。[1]每个极限序数的构造都标志着对不同的无穷层次，并且依次增大，无法通过简单的映射与自然数集合一一对应的无穷大小。

同时例如，与第一个超限序数相对应的第一个不可数无穷基数 $\aleph_1$，它比 $\aleph_0$ 大，而 $\aleph_2$ 又比 $\aleph_1$ 大，以此类推，形成一个以 $\aleph$ 表示的无穷基数序列，[2]康托尔在此基础上提出了著名的连续统问题：

> 我现在将证明，第一数类 (I) 和第二数类 (II) 的基数是紧密相连的，中间没有其他基数。[3]

换句话说，康托尔是要努力证明可数无穷基数 $\aleph_0$（自然数集的基数）和不可数无穷基数 $2^{\aleph_0}$（即实数集的基数）之间不存在别的基数。如果连续统假设成立，那么就意味着实数集的基数是紧接在 $\aleph_0$ 之后的基数，即 $\aleph_1$。

康托尔连续统的整个构造过程是通过“递增”和“极限”两种方法，逐步从一个数生成下一个数。每个新的超限数都是在某种规则下生成的，理论上，所有的超限数都可以通过这种构造方法被描述出来。然而，这种描述系统实际上是有限的，因为它依赖于递归和有限符号来表示这些超限数。

7.4.2 超限序数的良序定义阶段

康托尔的生成原则通过“递增”和“极限”两种方法有效地描述和命名：例如ω、ω^{ω}等一些基本的超限数。但是，随着层层递进的无限构造，尤其是进入Ⅱ类数时，超限数涉及更高阶的递归、指数运算或不可数集合时，它们可能不再遵循简单的继承法则。例如在康托尔的序列构造中，$\varepsilon_0=\omega_\varepsilon$ ，它需要对多个极限序列进行反复嵌套”。这一超限数的生成超出了普通的“递增”或“极限”的法则，涉及多个递归步骤和极限序列的组合。康托尔摆脱了最初阶段仅依靠递归生成的方法，转而基于集合的良序性来构建理论。在 1895 年和 1897 年的关于超限集合基础的论述中，康托尔通过引入良序集合的概念，对超限数进行了更抽象的重新定义。[4]良序集合的特征是任何非空子集都存在最小元素，基于这一点，康托尔将序数重新定义为良序集合的序类型（order type）。

[1] Cantor, Georg. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Teubner, 1883, p. 40.康托尔在此处对第二数类进行了进一步的层次区分，第一种类型的数字是对“连续性”的扩展，而第二种类型的数字则是离散的“跳跃”，它们定义了第二数类中的重要分界点。

[2] Cantor, Georg. “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.” *Mathematica Annalen*, vol. 46, 1895, pp. 481-512.

[3] Cantor, Georg. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Teubner, 1883, pp. 37-38.

[4] Cantor, Georg. “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.” *Mathematica Annalen*, vol. 46, 1897, pp. 207-246.

这种定义表明序数本质上是描述良序集合中元素相对位置的抽象对象。例如，第一个超限数ω和更高阶的超限数ε_0不再仅仅是通过自然数递归得到的结果，而是某种超越所有有限数的顺序结构，是一种结构化的独立的数学对象。这种基于良序性的定义方法也就是引入了实无限的概念，将无限视为一个已完成的、具体的整体概念，而非通过构造性方法逐步逼近的极限。认为无限集合不仅可以存在，而且具有可以严格分析的数学结构。康托尔进一步区分了绝对无限与实无限。绝对无限（absolutes Unendliches）代表了不可度量和无法被描述的上帝的无限，超越了任何数学上的构造和理解，而实无限（aktual Unendliches）具有明确的顺序类型，是可以进行操作和分析的数学对象。康托尔认为，实无限虽然被哲学家认为是一种“坏的无限”（schlechtes Unendliche），但它不仅在微积分和函数理论中的应用已经为数学分析已经奠定了基础，而且在自然科学的应用中也被证明是有效的。[1]他由此将实无限界定为相对于潜无限的一种本真无限：

> 在第一种形式中，即所谓的“非本真的无限（Uneigentlich-Unendliches）”，无限表现为一种可变化的有限性。而在第二种形式中，即我称之为“本真的无限”（Eigentlich-Unendliches），则是通过完全确定的无限集合表现出来的。[2]

但是康托尔的这种处理引发了认识论上的问题：一个有限的内在于时间性中的主体如何认识一个超越的实无限的数学对象。他本人也深刻地意识到了这个基本的数学哲学问题，以至于他在《一般集合论》的前言中有了这样的论述：

> 在将这些文稿提交给公众时，我不能不提及，它们主要是为两类读者群体而撰写的：一是那些研究数学发展史到最新阶段的哲学家；二是那些熟悉哲学古典和现代重要理论的数学家。我深知，我所探讨的主题从一开始就引发了各种不同的意见和观点，无论在数学家之间还是哲学家之间，至今仍未能达成共识。[3]

7.4.3 贝克尔对良序定义原则中实无限的批评

贝克尔注意到康托尔放弃了在早期集合论中对“无限”进行本体论论证的尝试，转而致力于良序集合的数学理论，更多地关注如何将这些无限集合形式化。他对康托

[1] Cantor, Georg. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Teubner, 1883, pp. 8-9.
[2] Cantor, Georg. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Teubner, 1883, p. 2. 相应的，胡塞尔在《算术哲学》将数区分为本真数与非本真数。
[3] 同上，前言部分。

尔第二阶段理论的批判主要集中在集合论的哲学基础上。因为康托尔集合论的第一个阶段是基于“递归”和“极限”的构造性方法。每一个新的超限数都可以通过前一个数的基础上生成，每一步操作都是明确且可理解的数学构造。这种递归和生成的方式使得无限性在数学上变得可理解。潜无限只是一个不断扩展的过程，而非一个概念上存在的整体。但在第二阶段，康托尔转而采用了基于良序集合的抽象定义，将超限数直接理解为良序类型，这种转变使得超限数失去了原有的直观性和构造性特征。贝克尔批评康托尔将实无限视为一个具体的存在，用以描述和定义超限数。

贝克尔将康托尔集合论划分为生成原则与良序定义两个阶段，这两个阶段其实暗含着潜无限与实无限的张力问题。他通过对康托尔第二阶段的中蕴含实无限的批判转而寻求第一阶段的生成性原则，从而对康托尔超限数进行本体论的支持论证。在这种意义上而言，贝克尔拒绝了希尔伯特对康托尔超限数的数学辩护，而是从布劳威尔基于潜无限的直觉主义出发，尝试通过胡塞尔现象学的意向构造为康托尔的超限数进行本体论的辩护。

> 因此，我对超限过程进行客观解释的努力旨在发展康托尔伟大思想的本体论特性。这在我看来是一个极其重要的哲学问题。[1]

7.5 超限数的意向构造：反思迭代与视域层级

现象学分析与超限数理论之间是什么关系？贝克尔认为纯粹意识的超限结构在面对超限数学理论时具有双重作用。一方面，前者是后者的应用，就像数学理论可以应用于物理学一样，比如法拉第发现电场的“实在性”需要通过矢量和张量演算来进行适当表述；另一方面，数学理论所应用的“对象”并非经验实体（无论是物理的还是心理的），而是超越论的纯粹意识的现象，是在超验意识中构造数学理论时起决定性作用的现象。因此，贝克尔对超限过程的研究旨在对康托尔的超限序数生成的超限计数过程进行现象学的解释（我们可以进行范畴直观把握的）。尤其是在胡塞尔意识现象的基础上，在纯粹意识内部通过意识行为的层级特征呈现出超限的复杂性结构。

> 胡塞尔在《观念》的第 100 节中通过引入层级特征（Stufencharakteristik）的

[1] Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl.” *Philosophia Mathematica* (3), vol. 10, 2002, p. 187.

> 概念，讨论了意向性的迭代，以此标志这种迭代过程，作为一个例子，我们可以用对自身的迭代性反思来说明：人们可以反思自身已经反思过的，然后再次反思，反思已经进行了第一次的反思，以此类推。最终，可以反思在这无限的序列中可以结束反思。在（ω）的基础上，也可以反思对最后一次反思的进行（ω + 1）等等，反思的迭代性不仅仅能通过所有的第二类序数，而且可能继续下去（反思（Reflexion）的一个无限递归过程。在这里，“（ω）”和“（ω+ 1）”代表序数用来表示无限序列中的位置或顺序。这里的问题只在于解释超限进程，也就是一种潜无穷，是无限进程的某种扩展。[1]

我们在前面已经更加详细地讨论过胡塞尔《观念 I》中意向性的层级关系和反思迭代的嵌套结构，贝克尔在这里突出了意识反思的迭代模式。胡塞尔将反思的意识行为称之为非独立的，因为它是“对意识的意识”。反思以原意识为前提而不能独立存在，只能以抽象的方式与原意识分离。反之，原意识虽然只有通过反思才能被发现，但它却不是通过反思而产生的。因此，当我在第二层级的反思中转向第一层级的反思时，我不可避免地将上层的反思经验作为其对象，以此类推。[2]贝克尔将反思的这种迭代可视为在意识层面上可以不断进行的层级序列构造，并将胡塞尔“层级特征”（Stufencharakteristik）作为一种“标示”（Index），用来标示每个被特征化的对象和其所属的层次。其中每一次反思都对应着序数构造中的一个步骤。在胡塞尔那里，这种“层级序列特征”只是一个有限的自然数 n；但是贝克尔尝试用一个超限数ω来代替它，认为我们不仅需要理解数学中的“无穷”概念，还需要将这一概念与意识的反思迭代过程进行对比：

（1）初始阶段：反思过程的开始可以对应于自然数序列的结束，即ω。

（2）迭代反思：每一次对前一次反思的再反思，可以看作是向序列中添加一个新的元素，类似于从ω到ω+1，然后到ω+2，以此类推。

（3）超限反思：反思的无限迭代过程对应于第二数类序数的探索。这不仅包括了简单的加法步骤，还可能包括更复杂的构造，如ω·2（反思两轮迭代的总和）、ω^{ω}（一个完全新的视域层级的反思迭代），甚至达到ε数这样的复杂结构，代表一个新的反思维度的开始。

[1] Becker, Oskar. Briefwechsel mit Dietrich Mahnke. *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, herausgegeben von Bernd Peter Aust und Jochen Sattler, Wilhelm Fink Verlag, pp. 252-253.
[2] HuaIII/1, S. 78.

贝克尔并不追求超限集合的良序序数的现象学基础。相反，他关注的是超限的序数生成过程，在这里，序数被理解为纯粹的序数而不是集合论实体。贝克尔认为在反思意识的不断迭代中，我们有了在意识中探讨潜无限的可能性，并由此“揭示了‘超限’结构在其特殊构造中的有限机制，从而使人类有限的意识能够把握它们。”与直觉主义者布劳威尔拒斥实无限不同的是，我们可以拯救康托尔超限数理论，并且“可以谈论超限数理论的本体基础。”[1]但问题的关键是，通过“反思”这一现象学动机，我们是否能够推导出所有的康托尔超限数？为了解决该问题，我们首先需要对超限序数的两个生成原则进行本体论—现象学的诠释。

7.6 超限序数生成原则的本体论—现象学解释及其反驳

从现象学的角度看，反思的意识现象可以作为康托尔两个生成原则的本体论基础：

> 我们现在很容易看出，这两个生成原则在反思过程中的作用，实质上是意向对自身的回返（这正是所谓的再反思！）。这种回返表现为两种情况：首先，当从第β阶段推进到第（$\beta+1$） 阶段时，通过反思对之前“直接指向的”反思体验的确认；其次，在从一个无穷嵌套的反思序列推进到这些反思的边界时，通过对这一无尽过程的完成所达到的规律性的反思。因此，可以合理地说，这种所描述的具体且明确动机的“反思”现象，作为康托尔两个生成原则的现象学基础而存在。[2]

第一个生成原则对应于从当前的反思阶段 β 的反思过渡到下一个反思阶段 $\beta+1$，也就是每次新的反思都必然建立在前一次反思的基础之上，这是一个基本的、直接的反思层级。[3]具体而言，当我完成第一次反思后，第二次反思就是对第一次反思的反思；第三次则是对第二次反思的反思，如此迭代，这种迭代反思形成了一个严格的序列结构。就如同任意一个自然数α，人们总是可以通过不断地加 1 构造后继的自然数$\alpha+1$。这种反思模式是有限的，因为它们是在有限的时间内，我们通过逐步构造的方式把握潜无限的。同时，意识的反思迭代也是一个“可数”的过程，这类似于数学中对可数无限的结构（例如自然数集合 $\aleph_0$）。我们可以逐步列举出每一层级的反思，每一层级

[1] ME, S. 548;561.
[2] ME, S. 549-550.
[3] ME, S. 549-550.

反思都依赖于前一层级的反思，如此等等，最终形成一个有序且无限的反思序列。贝克尔还通过陀思妥耶夫斯基的短篇《地下室手记》中的故事，进一步探讨了反思的迭代。[1]我们将第一个阶段的反思模式称之为线性指向（geradeaus gerichtete）的迭代反思。

第二个生成原则对应于我们从无限嵌套的反思迭代序列推进到它们的极限或边界，是一种以线性指向的迭代反思为基础的整体迭代反思。贝克尔认为，胡塞尔的反思不仅仅停留在对线性序列上前后单个反思经验的相互包含，而且还可以对作为各个反思层级之间的嵌套结构进行整体地把握。这种反思模式不是直接相互包含的线性序列反思，而是通过某种"联结"方式相互嵌套的反思层级。ω作为第一个超限序数，理论上代表了所有有限序数之后的位置。在反思理论中，我们从序列 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2, \cdots$ ，过渡到它们的极限。第ω次反思被设想为对所有先前有限级反思的一个整体把握。紧接着，第（$\omega+1$）次反思则被理解为对这个ω级反思的再次反思。就像康托尔通过定义极限来构造一个新的数字一样。每一次引入新的超限数时，都会将之前的结构（或者说前面的数字）保留下来，构成新的序列的一部分。所有的序列都由一系列的"生成"和"反思"所构成，但这些序列结构（Reihengefüge）本身并不具有一个固定的"完成时刻"，它们在某种意义上总是在"生成"的过程中，涉及到一个开放的、不断展开的视域。[2]这种"生成"的开放序列通过对一个整体经验的反思而得以整合，我们将第二个阶段称之为层级嵌套的迭代反思。

贝克尔对这两种反思模式进行了进一步的区分，线性指向（geradeaus gerichtete）的迭代反思属于嵌套意向性结构的部分和内容，是有限的（准确地说是潜无限的），而层级嵌套的迭代反思则是嵌套意向性本身的结构，是超限的。

> 人们必须仔细区分嵌套意向性的结构和这种嵌套本身的结构。前者的结构具有有限的复杂性，而后者则具有超穷的复杂性。[3]

但是这里两个生成原则之间的连续性问题需要进一步的论证。首先是我们如何从第一生成原则的可数无限的反思跃迁到超限的反思，即达到ω层级的反思？其次是在第二生成原则中的超限反思阶段会不会出现一个终极的反思行为，从而终止反思的无限

[1] ME, S. 542-543.
[2] ME, S. 551-552.
[3] ME, S. 547.

迭代的问题。也就是如何处理康托尔第二生成原则的最大序数悖论。[1]我们首先来看可数无限到超限数的连续和跃迁问题。

> 让我们仔细观察自我反思迭代的过程，即从具体的角度看，我们会观察到以下内容：我反思我刚刚进行过的反思，然后再次反思这第二级的反思，以此类推。经过一定数量的反思，比如 n 次，我停止了对这些反思的追复——从而跃迁到一个更高的层次，超越了这些不断交织的反思行为。在这个层次，也就是ω层级时，我当前反思行为的对象（即我现在所处的主题或内容），是所有早先进行的反思的无穷序列。[2]

对于超限进程的现象学解释的第一个反驳在于贝克尔用超限序数ω来代替胡塞尔在“层级序列特征”中构造的有限的自然数 n 是否是合理的。在对第一生成原则的讨论中，我们已经说明了意识的反思迭代类似于数学上可数无穷的结构（例如自然数集合$\aleph_0$）。具体地说，尽管理论上可以设想反思的无限迭代，但在实际操作中，反思的层次和次数始终是有限的。这个反对意见关键点是我们的意识结构不是超限的，而是有限的。在有限的时间内，我们只能进行有限数量的反思。我们可以依次列举出每一层反思，每一层当下的反思都是有限的，尽管反思的过程可以无限继续下去，但当我们仔细计数实际完成的反思次数时，始终只能得到 n 次，而非ω次。由此导致一个重要的质疑：整个过程是否真的是超限的？我们能否从 n 层级的反思真正跃迁到ω层级的反思？整个超限结构可能只是一种理论假设，我们对超限过程的本体论解释实际上只是一种意识幻觉。[3]

对于对超限反思的现象学解释的第二个反驳是存在一个终极的反思行为，该行为会终止反思的无限迭代；或者，反之，不存在一个终极的反思行为，反思过程由此陷入无限回退。该反驳基于康托尔的两个生成原则中所隐含的布拉利-福尔蒂悖论（Burali-Forti Paradox）。根据这些原则，我们可以构造一个包含所有序数的集合 W。它按照定义应是良序集合。照此推理，W 应该是一个“最大序数”，记为ωw。但是根据第一生成原则，对于任何序数 α，总能构造一个更大的序数 α+1。因此，ω不可能是

[1] 同古尔维奇、萨特等人提出的无穷回退问题不同，这里反思的迭代性对超限数的生成具有生产性而非作为无限回退的意识难题。Cf. Aron Gurwitsch, *Die mitmenschlichen Begegnungen in der Milieuwelt*. Berlin New York 1977, p. 126.
[2] ME, S. 548.
[3] Ibid.

所有序数的集合的序数，因为总是会有一个 ω+1 存在。[1]根据上述分析过的两个生成原则的现象学解释，如果将 W 过程视为一个类似于 α 或 β 的过程，那么最终会陷入一个悖论：即使 W 被称为一个反思过程的“终点”，而这个终点本身又是无穷的。

通过对超限序数的两个生成原则进行现象学分析，并揭示两个反驳意见，如果我们无法通过直接具体的考察现象来消除布拉利-福尔蒂悖论，那么这将成为质疑贝克尔所讨论的超限序数意识结构现象学分析正确性的充分理由。

7.7 视域层级结构对超限进程问题的解决

> 在“观照”（Betrachtung）中的第（n+1）次反思得以实现，是以先前已完成的反思无限性为基础，且能够在此原初意向的持续中可以进一步展开。从“观照”中的第 n 次反思到第（n+1）次反思的过渡，在本质上区别于从同质的第（n-1）次到第 n 次反思的过渡。意向性结构的超限复杂性始终保持不变，深入考虑这一异议并非无益。因为它使我们注意到了所谓“对反思的观照”中一个此前尚未被关注到的现象学“层级”（或“维度”）。这个新的层级具有根本意义，它揭示了第一个机制——这个机制在某种程度上引导着超限进程在其特有的动态性中的运动，从而使有限的人类心智能够掌握它们。[2]

对于第一个反驳，贝克尔认为我们从第（n-1）次到第 n 次反思与第 n 次反思到第（n+1）次反思的过渡在意向性的意义上是完全不同的。因为伴随着第 n 次反思，第 n 次反思的整体序列作为“视域的现象”被同时给予我们，这是第（n+1）次反思得以实现的条件。基于对已完成的第 n 次反思的无限性，n+1 次反思通过视域在这个原初意向的前提下进一步展开迭代。在此之前，我们没有注意到的视域现象在反思意识中具有如此根本性的意义。我们通过有限对无限的把握是在视域中展开的，正是视域引导着超限进程的持续动态，因此，“从现象学角度而言，无限永远是一个开放的视域，是一个无尽的过程。”[3]

贝克尔进一步指出，胡塞尔的反思不仅仅停留在单一相继的 n 个可数无限的反思，更重要的是它涉及对整体层级结构的反思。在意识的反思迭代中，虽然每一步反思都

[1] 在集合论中，“所有序数的集合”这一论述违反了基本原则。“所有序数”太大，不能被视为一个集合，而必须理解为一个类。现代集合论（如 ZFC 公理系统）通过将“集合”和“真类”（proper class）相区分而避免这种悖论。
[2] ME, S. 458-459.
[3] ME, S. 458-459.

可以看作是有限或可数无限的，但当意识超越了这些有限的层次时，形成一个超越所有前面反思的“综合反思”，就进入了一个无法完全列举的“超限”反思状态。这种超限性并不意味着无限反思的过程本身能够被完全列举或归纳，而是意味着能够同时把握所有反思层次的整体结构的反思。这与康托尔描述的“超限数”非常相似。康托尔的超限数从有限的数域扩展到无限，并进一步扩展到更高层次的“超限”数。例如，反思不再只是线性递增，而是进入了一种更为复杂的结构，类似于从ω到ωn ，再到更高序数ω^{ω}，$\omega^{\omega^{\omega}}$，$\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$的跃迁。这种反思不是静止的，而是动态的。它追求的是对规则性序列的理解，涉及到一个开放的、不断展开的视域。

> 更高层级视域的现象是决定性的。我将其视为与“普通”视域类似。它在意向性（Intentionalität）的迭代中得以显现。在迭代的每一个阶段中，回顾已经完成的迭代以及潜在可能完成的视域是必不可少的；不仅仅是回顾那些已实际完成的迭代，而是返视所有可能完成的视域。每当这种视域进入视野时，我便意向性地将其“把握”，并将其位于该视域的所有组成部分之上。但是，这样的视域没有“法则（Gesetz）”。[1]

针对第二个反驳，贝克尔在这里进一步指出反思的迭代中视域的层级及其开放性问题。我们不仅有单个线性序列中反思的意向性迭代，在这种反思的迭代中，视域的层次也是层层嵌套和迭代的，我们会从一个层级的视域进入另一个视域中，反思的目光贯穿其中。反思永远不可能涵盖所有“可能的”序列层级结构，依次嵌套和展开的序列层级结构并不能在某个时刻合并为一个单一的“总的整体序列结构”。W 作为一个超限数涉及一个永远无法完成的生成过程，并且不是一个可以通过简单迭代的有限步骤就可计算出的数学对象，它总是处于“生成”和“展开”之中。[2]如果我们将第二个悖论中 W 过程视为一个类似于上述的α或β的过程，那么就会陷入一个悖论：即 W 被当作一个反思过程的“终点”，而这个终点本身又是无穷的，无法通过一个一般的数学规则所约束。质言之，在反思的无限迭代中，最大序数 W 是在意识流中作为匿名者的主体自我的运作结果。

[1] ME, S. 551-552.
[2] Ibid.

7.8 图像意向性的超限迭代示例

贝克尔认为我们可以通过图像的自似性和嵌套结构来直观地说明反意向性迭代方式，并在此基础上阐释超限数的意识构造。他举例例如一本儿童读物的封面上画着一个孩子，这个孩子手里拿着这本儿童读物，这本儿童读物的封面上也是一个孩子拿着这本书的图像，如此一直嵌套迭代下去。贝克尔将这种不断地进行图像想象的再现类似于意识的反思迭代。

> 显然，在实际的呈现中，只有有限的（事实上非常少的）图像可以彼此嵌套[…]然而，即便如此，最初的这些嵌套已经根据其纯粹的理想可能性，使无限过程变得显而易见。这种“理想的”图像嵌套所展现的无限复杂性，被符号化地表象在我们呈现的某个图形中。而且，从某种意义上讲，这种符号表象正是进一步（第ω次、ω+1 等）的表象过程所应用的对象。然而，这种“符号”[表象] 决不是抽象概念的，而是直观的。[1]

通过图像的自似性关系和重复地再现（图像的图像，图像的图像的图像等等）可以直观地显现意识的反思结构在不断迭代时所形成的层级关系，其中每个具体的内容是有限的，但它们以某种方式始终指向更大的整体。我们结合上述超限数理论的递归结构与图像的意向性迭代，通过贝克尔给出的圆形迭代图示进行说明，[2]这个过程可以按以下步骤展开：

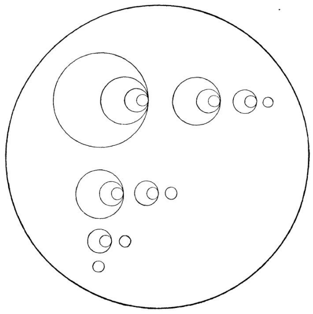


图 2

1）初始条件与有限 n 层级构造

从一个简单的初始图像 (K) 开始。假设这是一个圆，在其内部可以嵌有无限的同质图像序列。这里的“同质”意味着后续的迭代圆与初始圆在形状上相同，只是面积

[1] ME, S. 541.
[2] ME, S. 793.

呈线性缩放，每一个后继圆的大小都是前一个圆面积的一半。我们在这个初始圆的有限层级中呈现图像意向性：设想在圆 (K) 内存在一个序列 (1, 2, 3, …)，每一序列的图像都是上一个图像的 1/2 大小。通过这种方式，我们在有限层级（1, 2, 3, …）的生成过程中得到了一个逐级缩小的实现递归和嵌套图像序列。

2）从有限层级序列扩展到无限层级序列：引入ω序数

当这个逐级缩小的递归和嵌套图像序列将过程推进到极限时，我们就引入第一个无限序数 ω，用序数 ω 来标记这个无限层级的图像。它不只是 1、2、3... 这样有限次的缩小与嵌套，而是对应于自然数列一直进行下去的极限，这标志着图像意向性从有限层级上升到了无限层级。

3）超限序数的后继与递归映射：从 ω 到 ω+1, ω+2, …

在达到ω层级后，我们继续对初始图像 (K) 进行映射和缩小递归操作，产生对应于ω的后继序数层级的图像，并在超限序数ω上定义后继序数： ω+ 1,ω+2,ω+3, ... 。类似于在自然数上不断加 1，不断生成更高的无限层级序列的图像。

4）双重映射 (K') 与倍增序数ω·2

为了构造在达到ω之后继续迭代映射的更高层级的序数结构，贝克尔引入了双重映射（K'）。通过引入双重映射 (K')，图像相对于初始图像 （K）进行两倍映射，我们在原有的无限层级ω的基础上继续叠加一层相同规模的同等级的无限序列。这样，我们不再仅仅有单一的无限层次结构，而是将原有无限层次“并列”复制一遍，形成了两倍的无限序列结构，由 ω扩展为 ω+ω =ω·2。在此基础上，我们可以相继构造出一个这个层级中的超限序数序列：ω·2,ω·3,ω·4 , ... 。

5）迭代 （K''）与超限数ω^n

随着不断的迭代，可以从 (K') 扩展到 (K'')，并在 (K'') 内进行三重缩小与映射，通过不断重复这些迭代与扩张，使得图像序列可以涵盖越来越高阶的超限序数结构，进而产生 ω^2 这样的更复杂的超限序数标记的图像序列。在这种不断的迭代与扩展中，图像的迭代和嵌套分布在有限圆内越来越密集和精细，最终，图像序列的迭代覆盖了整个初始的有限圆。

7）“逆转”（reversal）操作与更高阶超限数ω^n

当图像的层级序列无法继续扩展时，我们进行“逆转”（reversal）操作，对迭代圆的半径进行倒数变换，将已扩张到无限层级的图像再次压缩回初始的有限圆。这一

步骤的作用是利用“逆转”操作获得的有限圆 （K(ω)）为起点，再次重复前面所有的扩张、映射、迭代过程，最终可以所有获得高阶超限数 ω^3 。同样地，我们可以在更高层级的基础上再次进行整个迭代过程，每一次的逆转与再扩张都将序数层级推进到更高阶的超限数层级（如 ω^ω等）。

综上，贝克尔通过从一个简单的初始图像出发（例如一个圆），不断地对其进行缩小、映射、扩展和迭代，从有限的层次扩展到无限的层次（如 ω 层级），再进一步扩展到 $\omega+1, \omega+2, \ldots$ ，然后通过双重映射等手段构造 $\omega\cdot 2$、ω^2 乃至更高阶数的结构。最终，当扩展无法继续时，通过一种“逆转”操作（类似于对图像进行倒数半径变换，将已扩张到无穷的图像序列再次压缩回有限的区域）重新迭代，从而达到更高阶的超限层级（如 ω^2、ω^3 等）的图像序列。

7.9 反思中的匿名者与最大序数悖论

> 现在，如果回到“反思”的具体现象学部分，它们依据康托尔的两个抽象一形式生成原则进行了解释，那么显然有一个决定性的问题：康托尔的序数 W 应的具体反思现象是什么？它必须是那种反思 R(W)，能回顾所有可能的反思层次，并“折返”。—— 是否存在这样一种反思，即它作为一个具体的现象可以被识别出来？[1]

依据胡塞尔的观点，我们如何处理最大序数的“匿名性”问题？每一个超限序数的生成都伴随着一个之前的序列，总会有一个更大的序数产生。由于超限序数这种不断递归的生成过程，我们无法将所有序数固定为某种“对象”。对应于第二生成原则的现象学解释，反思本身并不会导致这个悖论的出现。反思过程本质上是一个持续推进的过程，它从不停止，也不会固定在某个最终的“极限”上。即使我们认为 W 是最大的序数，反思过程总是可以超越 W，进入更高的层级。问题是如何能够通过反思而将一个原初不曾是对象的东西变成为对象，这里关切到的是一个匿名的、非主题性的、隐含的原意识概念，也就是“自身觉察”困难性的悖论根源所在。[2]

> 即便对于上帝来说，世界也不是一个可计算的世界，或者一个已经被无限计

[1] ME, S. 551-552.
[2] Hua III/1, § 74.

算过的世界，例如对于一个无限的上帝来说。高斯——这在根本上错误的。以计算的形式计算神的“创造”（“建构”，尽管是物理世界的“建构”）是荒谬的。**超越论的匿名者是无限遥远和隐藏的，超越论的启示在一门逻辑斯蒂的逻辑学中永远不会有一个可逻辑化的视域。**[1]

胡塞尔已经处理过对匿名性与无限反思的悖论问题。[2]匿名性是指已经在发挥着作用却未被课题化这样一种状态，它不仅是自我在原体现性中的隐藏状态，也是意识自身构造过程中的重要维度。[3]原意识虽然只有通过反思才能被发现 ，但它却不是通过反思而产生。 反思以原意识为前提并因此而依赖于原意识，而反之则不成立。反思的自我虽然可以在一个追加的第二阶段反思行为中，试图确认第一阶段中反思着的自我与被反思的自我的同一性，但这一新的反思行为同样会生成新的时间间距。因此，现时的反思自我再次无法直接对象化自身，必须借助另一次后续反思，如此形成无限的反思递归。这种递归性的反思形式说明，反思作为一种“后觉知”（Nach-Gewahren）的活动，总是滞后于原体验，无法直接实现对自我的原始体现性捕捉。[4]反思的自我试图总是呈现“本己的体现性”，将自身对象化，从而在现时的功能中直观到。但胡塞尔指出，这种努力始终受到时间性结构的限制。反思的自我无法真正触及现时的“原体现性”，因为反思行为本身具有后设性，它所指向的总是一个已经过去的自我经验。也就是说，成为反思对象的自我始终是一个过去的、被时间间距隔离的自我。

正是由于主体自我的隐匿性及其与反思自我的间距性，自我才能够在反思过程中在敞开的视域中逐步显现为一个多层级的、不断生成的主体。反思的迭代是具有生产的无限性而非是回退的悖论，不断生成和始终匿名的主体自我是反思自我的生发点而非循环点。因此胡塞尔并未将这种无限递归视为反思的失败，而是将其视为意识结构的必然结果。“活的当下的自我”或“原自我”成为最终起作用的现象学反思的根基。[5]

7.10 外尔对超限构造的批评与贝克尔的反驳

贝克尔以“对几何学及其物理学运用的现象学论证论稿”为题在胡塞尔指导下通过

[1] Hua XXIX. S. 206-207.
[2] Hua I, S. 81;89.
[3] Hua I, S. 84; Hua VI, S. 114; Hua VII, S. 262.
[4] 倪梁康：《胡塞尔哲学中的“原意识”与“后反思”》，《哲学研究》1998 年第 1 期，第 63-77 页。
[5] 克劳斯·黑尔德：《活的当下》，肖德生、鲍克伟译，商务印书馆，2020 年 10 月，第 140-141 页。

了任教资格考试。[1]在该书的导言部分，贝克尔指出自己的几何现象学的工作是基于胡塞尔的现象学与外尔的物理学："因此，在撰写这篇论文时，我们首先要感谢埃德蒙·胡塞尔，他的研究是这篇论文的基础，其次是赫尔曼·外尔，他对数学物理问题的阐述为现象学分析提供了更为合适的材料，因为他本身也了解现象学。"[2]胡塞尔对这项自然现象学及其构造的研究工作非常满意，由此向外尔极力推荐了贝克尔：

> 贝克尔博士已经完成并提交到系里的任教资格论文表明，我的弗莱堡圈子对您的研究有多么浓厚的兴趣。我已经深入研究了他的论文并给出了高度认可的评语。它差不多就是对爱因斯坦的观点和您的发现以及我的自然现象学研究的一次综合。他试图通过深入而原本的阐述证明，爱因斯坦的理论只有在通过您的无穷小几何研究得到补充和奠基后，才能展现自然的"结构法则性"（相对于特定的"因果"自然法则性），这种结构法则性必须基于最深层的超越论构造原因而被认为是必要的。[…]他在这里也试图证明，只有布劳威尔——外尔的理论唯一符合构造性一现象学根源研究的明确和必要要求的理论。[3]

在胡塞尔的介绍和引荐下，贝克尔与外尔就数学基础的相关问题展开了书信来往与学术交流。外尔与贝克尔之间的书信交流目前仅存 6 封，[4]其中外尔写给贝克尔的书信目前已不复存在，但由于贝克尔每次回复外尔的书信都极其详尽，我们可以据此重构外尔的部分论点。其次，贝克尔与胡塞尔的另一位学生迪特里希·曼科（同时也是希尔伯特的学生）的通信中也完整保留了致外尔书信中的许多完整段落。[5]贝克尔写给外尔的前四封信主要讨论了与他的教职资格论文相关的问题，其中关涉到两人关于经典物理学和广义相对论的超越论现象学基础的讨论。[6]在 1923 年 4 月 12 日的第一封书信中，贝克尔还附寄了他刚刚出版的教职资格论文，感谢了外尔在数学基础、相对论方

[1] 倪梁康：《二十世纪数学基础论争中的现象学——从胡塞尔、贝克尔与外尔的思想关联来看》，《中山大学学报(社会科学版)》，2016 年第 56 卷第 4 期，第 104-114 页。

[2] ME, S. 388.

[3] Brief. IV, S. 293-294.

[4] 这些书信保存在苏黎世联邦理工学院的科学史档案馆收藏的外尔遗稿里，包括贝克尔写给外尔的六封（1）弗莱堡，1923 年 4 月 12 日（Hs 91.470）（2）弗莱堡，1923 年 4 月 25 日（Hs 91.471）（3）弗莱堡，1923 年 6 月 27 日（Hs 91.472）（4）弗莱堡，1924 年 10 月 10 日（Hs 91.473）（5）弗莱堡，1926 年 7 月 2-7 日（Hs 91.474）（6）克特里奇，1926 年 8 月 16 日（Hs 91.475）。

[5] Becker, Oskar. Briefwechsel mit Dietrich Mahnke. *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, herausgegeben von Bernd Peter Aust und Jochen Sattler, Wilhelm Fink Verlag, pp. 245-358.

[6] Mancosu, Paolo, and Thomas Ryckman. "Geometry, Physics, and Phenomenology: Four Letters of O. Becker to H. Weyl." T*he Adventure of Reason: Interplay Between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic*, 1900-1940, edited by Volker Peckhaus, Oxford University Press, 2011, pp. 308-345.

面的工作使得几何学的现象学基础成为可能。

> 我相信，您对连续统问题以及空间和时间结构的看法，恰恰使得能够给几何学提供（在‘世界几何学’的意义上）提供一种完整的现象学基础成为可能。在我的工作中，我试图勾勒出这样的一种现象学基础。[1]

由于论题所限，我们在这里并不进一步分析自然科学的基础与超越论现象学的关系，而是转向二人书信中关于超越论现象学的数学构造及其争议所在。因为贝克尔在其教职论文中关于几何物理现象学的精彩论证以及胡塞尔的极力推荐，外尔作为《专题研讨》（Symposion）的编辑，建议该杂志的出版商威廉·贝纳里（Benary）邀请贝克尔为即将出版的期刊投稿。贝克尔提交了一篇在其《数学实存》中关于超限数意向构造部分的论文。外尔在阅读之后对贝克尔在这篇文章中呈现的数学现象的超限数构造与海德格尔式哲学转向极为不满，并建议贝克尔删除关于文稿中关于超限过程的意向性构造。[2]贝克尔坚决反对外尔的意见，他认为如果删除了超限数的意识构造，那么整个数学实存的理论将什么都不会剩下，而且他在这篇文章中并没有什么需要撤回和修改的观点。[3]贝克尔将外尔反对意见分为数学和哲学两个方面。让我们首先处理贝克尔对外尔在数学方面反对意见的进一步驳斥。

7.10.1 贝克尔对外尔关于超限构造的数学批评的反驳

外尔首先立足于希尔伯特和布劳威尔关于超限数的观点，拒斥建立在有限直观基础上的超限数的可理解性。他认为从布劳威尔的立场而言，我们没有充分的数学动机来超越明显的可洞见的真理（einsichtigen Wahrheiten），只有有限主体在时间意识中的可构造数学真理才是有效的，[4]而且希尔伯特本人也会承认所有超限的数学陈述都不能得到可理解的解释性的数学真理的支持和辩护。[5]我们在第 4 章已经分析论述了希尔伯特元数学的有穷主义的直观理论对其形式系统的认识论保证，但外尔显然并不了解这

[1] 贝克尔致外尔，1923 年 4 月 12 日。Cf. Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. “Geometry, Physics and Phenomenology: Four Letters of O. Becker to H. Weyl.” In *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, Wilhelm Fink Verlag, 2005, p. 211.

[2] Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl.” *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, pp. 174-175.

[3] “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl.” *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, p.187.

[4] Weyl, Hermann. *Die Stufen des Unendlichen*. Fischer, 1931, pp. 17-18；Weyl, Hermann. *The Open World:Three Lectures on the Metaphysical Implications of Science.* Yale University Press, 1932, p. 82.

[5] Weyl, Hermann. “On the Current Epistemological Situation in Mathematics.” In Mancosu, Paolo, editor. Philosophy of Mathematics: Selected Readings. Oxford University Press, 1998, p. 136.

一点，他依然将形式主义的纲领理解为一种胡塞尔意义上的游戏数学，“如果希尔伯特不是在玩一种符号游戏，那么他追求的是一种理论数学，与布劳威尔的直观数学相对。但这种符号指向的超越世界究竟在哪里呢？”[1]因此，外尔在综合希尔伯特和布劳威尔关于超限数的立场的基础上，严厉反驳了贝克尔关于超限数的意识构造，认为“超限的意识视域”既无必要也无法展示。

> 关于您对我试图建立一个“实事”（sachlich）的超限理论的基础批评，在我看来可以分为两部分，一个是数学性的，另一个是哲学性的。您写道，您既看不到展示特殊（超限）意识视域的必要性，也看不到其可能性。对此我必须坚决反对。遗憾的是，现象学描述对不同的人有不同的说服力，而且无法强制让人接受。但我认为我已经非常清楚地展示了这个意识视域，而且在这一点上我也可以诉诸胡塞尔对我的认同。[2]

贝克尔认为自己已经清晰地展示了这种意识视域，但现象学的描述对于不同的人来说具有不同的说服力，并且关于超限数的意识构造已经得到了胡塞尔的认可。这一反驳在学理上显然并非非常有效。外尔认为这种超限构造的不可能性的原因在于：首先是康托尔序数理论中第一生成原则由于其开始于自然数的递归而具有一定的数学理论的狭隘性；其次是第二生成原则的良序理论则依赖于实无限和排中律；最后是布劳威尔和希尔伯特试图为超限概念奠定基础的尝试，甚至都无法涵盖第二数类（即所有可数序数）。[3]贝克尔同意外尔对康托尔超限数的生成原则的批评，我们在前面已经论述过超限数的两种定义方式中存在的问题。

但是基于最后一点，贝克尔认为对超限数的意识构造可以将良序集合理论进行重新诠释，从而使得其中至少一部分定理在直觉主义意义上具备合理性。贝克尔基于我们在前面已经论述过超限进程的意识层级结构，认为第二数类的视域层级是黑格尔（Hegel）所谓的“好的无限”，以此区别于自然数的可数无穷中简单无限递进的“坏的无限”。贝克尔在此并没有详细论证，只是假设如果第二数类中的每一个更高阶元素都可以被标示，那么将整个第二数类视为一种新型、不可数的类型 Ω 的视域是完全合理的，并且这种视域在其序列层级中可以作为现象在后继序列中成为原初给予的生

[1] Ibid.,p.140.
[2] “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl. ”*Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, p.187.
[3] ME. S, 780-781.

成环节。凭借这一新的极限视域 Ω，第三数类也有可能被构造出来。贝克尔强调，他将超限过程理解为一个“有限的分层视域系统”。例如，现有的视域包括超限序数：ω、ω^2、ω^3、……、ω^n、……，这些超限序数构成了视域序列的层级结构。真正的困难在于如何准确描述这种“层级结构”。外尔对此一个关键质疑是这种超限序数的意识层级序列是否会陷入最大序数悖论，他将这个问题称之为“临界数”问题。

> 外尔教授在一封信中提请我注意这个问题。每一个基于已定义的超限数来确定更大超限数的定义系统，最终都会失效。这意味着，无论我们如何构建定义系统，试图一步步定义更大的超限数，最终都会失效。[1]

“临界数”问题实质是对第二数类中的每个序数都必须具有“有限可描述性”标准的坚持，即第二数类的任意序数能否在有限的符号扩展下通过康托尔所提供的生成原理加以描述。[2]外尔认为如果我们能够对无限序列进行反思，那么就必须将其作为一个整体（ein Ganzes）来把握，也就是通过一种这种有限可描述性“法则”来完成。我们在上一节已经处理过最大序数悖论与视域的隐匿性问题。贝克尔认为这个反对意见非常重要，他认为对超限数的现象学构造确实只能达到第一个 ε 数，即ε_0。[3]但超限构造过程中更高的视域不可能是一种法则，就像基本时间序列不是法则一样，但它可以作为超限法则φ（α）的基础。贝克尔在此基础上区分了函数性的法则和参数性的法则的不同，法则 φ() 是有限的，因为函数的定义通常基于有限的规则或公式。然而，当我们将变量 n 应用于无限的整数集合时，就引入了无限性。这种无限性并非来自函数的定义，而是源于变量 n 所能遍历的无限多个值。[4]

在信件的最后部分，贝克尔回应了外尔对“纯粹意识的超限复杂性是”是“一个模糊概念”的批评。贝克尔认为，外尔的这一评判标准如同逻辑主义者弗雷格所主张的，将自然数纯然建立在逻辑定律上才能被视为唯一准确的基础，那么同理可以指责外尔预设的“基本数列”作为数学的基础并不比超限数的意识构造更加清晰。贝克尔声称，超限反思的视域层级和胡塞尔“如此等等”的迭代反思同样具有确定性，只是更加复杂且难以通达。超限数必须通过反思过程的现象学奠基，这种认识论的构造方法与希尔伯特通过元数学的直观理论为形式系统的一致性证明同样具有方法有效性。

[1] ME. S, 568, Fußnote 3.
[2] ME. S,567-568.
[3] ME. S, 569.
[4] ME. S, 346-347.

7.10.2 贝克尔对外尔的哲学批评的反驳

外尔认为，贝克尔试图通过现象学的意识分析对超限结构进行本体论解释会掩盖数学的实质问题，这种努力不过是一种哲学上的天真：

> 我不想诉诸于哲学对其自身研究领域的主张，甚至不想诉诸于哲学对各门个别科学的问题和方法进行批评的权利，以此“掩盖”我在数学上的“错误”。[1]

贝克尔将这种分歧的根源归结于对数学与哲学之间关系的不同理解。尽管哲学通常被赋予了对各门具体科学（如数学、物理学等）进行元批判和元反思的权利，但他并非要凭借哲学的批判权利掩饰自己在数学方面的不足。相反的是，外尔的观点隐含了新康德主义科恩（Cohen）和纳托普（Natorp）将哲学视为数学的“仆人”的立场。贝克尔主张哲学必须捍卫数学领域中追求其“本体论”问题的权利，而且哲学与数学应当有权进行相互的实质性批评：

> 我并不清楚您所谓的“哲学的天真”究竟指什么，是指哲学家在数学上表现出的天真，还是指数学家在哲学上表现出的天真？依我之见，这两种情况都存在。对于第一种情形（哲学家对数学的天真），优秀的数学本身就自然而然具备抵御能力；但对于第二种情形（数学家在哲学上的天真），数学本身就完全无法作为整体加以抵抗——对此，您自己已针对那些空洞的形式主义和粗鄙的感性主义对普通数学家提出了严厉批判！我认为，正因为如此，有必要主张哲学与数学应当拥有相互进行实质性批评的自由权利。我们今天已无法回到新康德主义的立场：在那里，人们让哲学跪伏于实证科学之后，以惊叹的口吻问道：“这一切（这神圣不可侵犯、美妙无比的科学）是如何可能的？！”[2]

贝克尔认为外尔所谓的“哲学的天真”具有双重意味。首先是哲学家对数学的天真，由于本身缺乏数学训练，他们可能错误地解读数学或犯某种幼稚的错误，例如黑格尔对牛顿和莱布尼茨的微积分理论的批评，认为“无穷小量”是一个“模糊的和矛

[1] Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl. *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, p. 186.

[2] Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl. *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, pp. 173-174.

盾的概念”，并认为数学家对“无限”的理解不符合他的“辩证逻辑”。[1]但数学本身的严密性和形式化可以抵御这类天真的干扰。贝克尔着重讨论了作为第二种情况的数学家对哲学的天真。他认为数学家无法处理康托的集合论、希尔伯特的公理化计划、哥德尔的不完备性定理中出现的“无穷”或“超限”的数学存在问题。贝克尔指出，尤其是外尔本人也批评了数学中形式主义的符号操作游戏。因为在形式数学中，一切与无矛盾性证明无关的本体论问题直接被忽略掉了尤其是康托尔提出的超限现象被简化为序类型的描述与分类操作。通过对简单的良序集的考虑，形式数学可以同构地映射最初的超无限数，如$\omega+1$ 和$\omega\cdot 2$，这些数学上的映射虽然在形式上是合法的，但是却无法解决超限数的本体论的问题。序类型与真正的超限数之间存在根本性差异。例如 $\omega+1$ 在这种视角下一个平凡的描述性特征，但作为真正的超限数来理解，$\omega+1$ 是一个“奇迹”，它意味着我们的数学认识从有限到无限、从无限到超限的超越含义。希尔伯特对康托尔的赞美也体现了这一点，他称超无限数理论为“纯粹人类活动中最令人钦佩的成果”。因此，贝克尔认为同构在纯粹数学层面上具有最终决定性，但在本体论层面，无限问题才刚刚开始。我们要将无限概念的构造过程还原至超越论的意识现象（transzendentales Bewusstseinsphänomen）中，但这种纯粹意识中超限结构（transfinite Struktur）的现象学阐明，其意义在于澄清数学超限理论的本体论结构，而非直接推动集合理论本身的发展。

外尔对符号数学的坚持对应于他在基础思考中进入的新阶段，这一阶段的特征恰恰是放弃了他在 1921 年作品中捍卫的直觉主义立场。贝克尔写这封信时起初认为是一些误解导致了他们之间的意见分歧。但是在外尔回复了贝克尔的上一封书信，并且寄回了贝克尔此前寄送的《数学实存》部分书稿时，贝克尔同时阅读了外尔刚刚出版的《数学与自然科学的哲学》，他才意识到“（外尔）对我观点的强烈否定并非基于对我表达的简单误解，而是基于深刻的立场分歧”。[2]

7.11 本章小结

本章以潜无限和康托尔的超限数为例，运用现象学的超越论对数学对象进行了意

[1] 黑格尔:《黑格尔著作集·第 5 卷·逻辑学I》，先刚译，人民出版社版，2019，第 231-289 页。黑格尔在第一卷·第二篇·第二章·C 小节中讨论了量的无限性问题，尤其是“数学的无限者的概念规定性”与“从微分计算的应用推导出微分计算的目的”的两个注释。

[2] Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl. ” *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, p. 185.

识构造，从现象学角度为直觉主义中有限性的可判定性构造和形式主义中无限性的非矛盾性建构之间的争议提供了现象学的解决方案。贝克尔将胡塞尔意识现象学中线性反思的迭代性与视域层级的嵌套结构，作为康托尔超限数两个生成原则的本体论基础。基于此，本章进一步探讨了如何在第一生成原则中，从可数无限的反思如何跃迁至超限反思，并尝试解决在第二生成原则的超限进程中，匿名性在无限反思中的显现与最大序数悖论问题。最后讨论了外尔对超限构造的批评和贝克尔的反驳，认为超限结构的意识描述在于澄清超限理论的数学本体论结构，而非解决集合论的悖论问题。

第 8 章 数学对象的存在论解释

任何一种存在之理解都必须以时间为其视域。[1]

——海德格尔

既然“实存”（Existenz）是一个关于存在的表达，那么关于“数学实存”的问题就是关于数学的存在，更准确地说，是关于其存在的方式（Wie seines Seins）。因此，我们询问数学存在的方式，从而在哲学上思考数学。[2]

——贝克尔

8.1 引言

贝克尔认为，作为两种不同的数学认识模式，直觉主义与形式主义之间的对立植根于亚里士多德—康德的批判数学哲学与柏拉图—莱布尼茨的数学神秘学传统。直觉主义本质上是证明与构造的数学，其根本问题是可判定性（Entscheidbark），而形式主义是本质上是演绎的数学，其根本问题是非矛盾性（Widerspruchsfreiheit）。进一步的分析表明，这两种数学认识的对立产生于对生活本身的人类学理解与绝对认识的观念论之中。因此，数学对象作为纯粹形式意识和具体历史存在的真正现象，它既可以通过构造性分析也可以通过存在论解释来通达。我们从数学对象与时间性的关系出发，在前一章对形式数学中的超限数和直觉主义中的选择序列进行意识构造的基础上，继续讨论这两种数学对象的时间性与历史性解释，并将数学存在嵌入人类实际性和历史性此在的相互关系中。

最后我们将讨论，贝克尔通过柏拉图—莱布尼茨的神秘学传统，针对形式主义数学中直觉主义不可构造的有效性部分与自然结构的和谐一致性问题，提出了一种“预示”（Mantische）现象学，并指出在更高层次上思考数学存在性与宇宙和谐、上帝超越性之间的关联问题，不只是需要认识论主体的意识构造与此在解释（Auslegung）进路，而且还需要对其进行“示明”（Deutung）的神秘性现象学模式。同时我们将对这

[1] 海德格尔:《存在与时间》(中文修订第二版)，陈嘉映、王庆节译，熊伟校，陈嘉映修订，商务印书馆，2018 年，第 1 页。
[2] ME, S. 675.

种预示现象学的认识论不充足性展开批评。

8.2 数学实存：从数学对象的构造性解释到存在论解释

希尔伯特与布劳威尔关于数学对象和基础问题的争论中，现象学的立场是什么？贝克尔重新讨论了数学认识对象与数学认识活动之间的时间性问题，不仅包括逻辑上的探究，而且尤其包括存在论的研究。将胡塞尔的超越论现象学理解为一种“形式的”现象学，即仅仅处理纯粹意识的类型和结构的问题，而海德格尔的解释学现象学则是去形式化的、讨论超越论经验发生的、个体的存在以及历史性的维度。他认为数学现象不仅存在于抽象的意识领域，而且与具体的历史背景和主体的存在方式密切相关。数学认识根本上是一种植根于具体人类经验的实践活动。自由选择序列和超穷进展代表了一种无限“序列”的形式，但此前从未被视作具有时间性的现象通过康托尔的超限进程（transfiniter Progressus）和布劳威尔的自由选择序列（freie Wahlfolge），新的现象学可能性得以出现，但尚未被完全阐述。这些自由选择序列和超限进展代表了一种无限“序列”的形式，但此前从未被视作具有时间性的现象。这种数学观无疑与康德的算术基于纯粹的时间直觉的观点有相似之处，但对于贝克尔来说，它与布劳威尔的直觉主义更直接相关。贝克尔在《数学实存》中首先讨论了布劳威尔以及外尔的直觉主义和希尔伯特的形式主义之间关于数学基础问题的争论。他将这场争论的焦点归结为这样一个问题:“形式系统的可建构性与无矛盾性是否可以保证数学对象的实存”，并以此开始对“数学对象的存在论意义”的讨论。贝克尔主张，只有从历史—解释学的立场出发，才能完全理解直觉主义。我们接下来将继续讨论贝克尔对数学和逻辑的存在主义解释，以及如何从时间性和历史性角度重构这些概念。

8.2.1 贝克尔的《数学实存》：从胡塞尔的《算术哲学》到海德格尔的《存在与时间》

胡塞尔在 1926/27 年的《哲学和现象学研究年刊》的第六卷上同时发表了贝克尔的《数学实存》与海德格尔的《存在与时间》。[1]海德格尔的工作旨在研究人类此在的存在论，而贝克尔的工作则致力于分析“数学现象的逻辑学和存在论”。根据海德格尔的报告，胡塞尔之所以将这两本书放在一起出版，目的是要表明：他的超越论现象

[1] Heidegger, Martin. Sein und Zeit. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, edited by Edmund Husserl, vol. 8, 1927, pp. 1-438;
Becker, Oskar. Mathematische Existenz: Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, edited by Edmund Husserl, vol. 8, 1927, pp. 439-809.

学既可以运用于数学和自然科学，也可以运用于精神科学。[1]这两部作品都试图用时间性的概念来阐明人类存在与数学存在的问题。海德格尔在《存在与时间》中同样将数学存在作为存在问题进行讨论。

> 貌似最严格构造的最稳固的科学，即数学，陷入了基础的危机。如何赢得和保证那种本原的方式，借以通达应当成为这门科学的对象的东西——围绕着这一问题展开了形式主义与直观主义之争。[2]

贝克尔在《数学实存》序言中明确表示，他对数学哲学的处理大量借鉴了海德格尔的解释学现象学研究方法，同时还加入了胡塞尔超越论的构造现象学的方法。他的目的是将形式现象学到解释学的现象学的过渡在于将“超越论的纯粹意识结构”推进到具体“此在的历史”。

> 现在很容易看出，我们自己的数学一存在论的个别解释完全遵循了那个“观念论”的可显明性原则，并且也部分遵循了在解释学的现象学意义上对它的具体推进（历史的—人的“此在”是超越论的存在）。数学基础研究随之而被纳入哲学研究的广泛背景中进行考察。[3]

贝克尔认为，数学实践不仅仅是理性演绎的结果，更是一种特定的存在方式，它是与人类存在的方式紧密联系的，类似于音乐和哲学的实践。《数学实存》深受海德格尔关于此在（Dasein）实际性的最新研究的影响。在海德格尔前往马堡之前，贝克尔曾参加过他在弗莱堡开设的许多研讨会，他宣称“把‘数学存在’放在人类此在的语境中，这里的关键是试图将数学存在嵌入人类实际性和历史性此在的解释语境，[4]也就是将对此在的解释运用到数学领域，提出数学是一种“数学化的此在”（mathematisierendes Dasein），即人类通过数学来揭示和体验世界的一种方式，并试图发展一种接近此在结构的数学哲学。我们将在下面分析，这种数学哲学的人类中心主义解释导致莫里茨·盖格尔（Moritz Geiger）、海因里希·舒尔茨（Heinrich Scholz）和恩斯特·卡西尔（Ernst Cassirer）对贝克尔进行了批评，这促使贝克尔以论战的方式

[1] 倪梁康：《现象学的数学哲学与现象学的模态逻辑——从胡塞尔与贝克尔的思想关联来看》，《学术月刊》2017年第 49 卷第 1 期。
[2] 海德格尔:《存在与时间》，陈嘉映、王庆节译，北京，三联书店，2006 年，第 11-12 页。
[3] ME, S. 1.
[4] ME, S. 2.

进行回应。[1]

8.2.2 数学对象的存在论解释进路

贝克尔对数学实存的分析是从逻辑学和存在论两条进路进行的。数学实存的逻辑学进路，也就是数学对象的构造性解释已经在上一章分析过。一致性定义和可构造性定义只能保证数学对象的存在问题，但无法解决数学存在的问题。我们能够从一个更深层次的“存在论角度”来解释现象学中提出的事实，即数学对象可以被理解。数学存在的哲学问题被贝克尔定义为一种存在论问题。在他看来，“存在论”并不是十七、十八世纪理性主义所理解的关于存在的一般科学，也不是纯粹意识的直观现象学意义上所谓的“超越对象”的本质科学。[2] 相反，存在论在贝克尔看来是海德格尔意义上的“实际性解释学”（Hermeneutik der Faktizität）。[3]尽管它与可能的本质的（eidetic）研究有一定的关系，但这里主要是解释性的，目的是探讨在数学历史中出现的某些精神历史现象的意义，而非其它的纯粹可能性。贝克尔认为在“数学的存在意义”（Seinssinn des Mathematischen）的意义上，这种存在的意义可以被描述为“本质”（Wesen）的，也就是存在论（ousia）而非本质艾多斯（eidos 或 idea），而且这里的“存在”并不是海德格尔在《存在与时间》中所赋予的特殊含义，而仅仅是指“存在的方式”（Seinsweise）。[4]

数学作为一门科学的存在以及数学对象在我们的生活和世界中的“显现”，数学对于人的存在方式和理性认识活动的不可或缺性，我们需要将其理解为实际生活的存在方式（Weise）。贝克尔试图阐明和解释一些在具体思想历史（Geistesgeschichte）中的现象的含义，更具体地说，是数学历史中的现象。他的目标并不是去探究哪些“纯粹可能性”可能在这个实际历史的过程中发生，然后将它们作为分析的对象。例如，20 世纪初关于数学存在的争论，这场争论是布劳威尔的直觉主义与希尔伯特的公理形式主义之间的对立。这场争论对实际生活的动机有什么意义？根植于实际性本身的何种含义的动机决定了数学研究的出现和发展？

[1] Geiger, Moritz. Review of Becker’s Mathematische Existenz. *Göttingische Gelehrte Anzeigen*, vol. 47, 1928, pp. 401–419; Scholz, Heinrich. Review of Becker’s Mathematische Existenz. *Deutsche Literaturzeitung*, vol. 5, 1928, pp. 680–690; Cassirer, Ernst. *Die Philosophie der symbolischen Formen*. Vol. 3, Bruno Cassirer, 1929. English translation: *The Philosophy of Symbolic Forms*. Vol. 3, Yale University Press, 1957.

[2] ME, S. 2.贝克尔指出，“存在论”（ontologisch）一词虽然受到海德格尔的影响，但在这里的用法比海德格尔更自由，而并不严格遵循《存在与时间》中的术语。

[3] 海德格尔在 1923 年弗莱堡的讲座中提出的课程中提出了关于存在论或实际性的解释学（Ontologie oder Hermeneutik der Faktizität）

[4] 贝克尔指明这里是借用了保罗·约克·冯·瓦滕堡伯爵的说法。Yorck, Paul. *Briefwechsel Dilthey-Yorck*. Niemeyer, 1923, pp. 60, 113.

> 那么我们必须问：数学哲学究竟应该解决什么问题？根据我们对哲学问题的根本理解，真正的哲学问题是关于“存在”（Sein）的问题：更确切地说，是关于所讨论之存在的意义（Sinn）以及可能的“存在根据”（Seinsgrund）。换言之，这是一个存在论（ontologisch）的问题。因此，既然“实存”（Existenz）是一个关于存在的表达，那么关于“数学实存”的问题就是关于数学的存在，更准确地说，是关于其存在的方式（Wie seines Seins）。因此，我们询问数学存在的方式，从而在哲学上思考数学。[1]

他的目标是去探究数学的含义，他指出“数学的”（mathematisch）来自希腊文μάθημα;máthēma）是一个有意义且双关的词汇：一方面指代数学思维过程中的生命活动；另一方面指代这一思维活动本身所涉的客体。

8.3 数学对象与时间性

贝克尔的数学实存的观点首先与康德的算术基于纯粹的时间直观的观点相似。在康德看来，时间作为先天直观形式，是内感官的一切现象的形式，并由此构成算术的基础。[2]因此，数根源于时间，但数的概念并非直接给予的，而是通过对单位（Einheit）的逐次添加生成的：例如，从“1、2、3……”，该数学活动过程依赖于特定的人类直观形式。其次，贝克尔的数学实存与布劳威尔的直觉主义更加直接相关，尤其是有限主体的数学认识活动与无限数学对象之间的时间性与历史性关联。贝克尔试图用时间性的概念来阐明此在对于数学实存的意义。海德格尔的《存在与时间》第一部分的标题是“用时间性来解释此在，以及将时间作为存在问题的先验视域来阐释”。贝克尔同意海德格的观点，即历史时间的经验有其独特的结构，这种结构并不能通过科学所描述的无穷、线性、客观的时间系列来把握。人类的“时间性”具有历史性的局限性（historische Befangenheit），即人类的体验和认识活动都受到其历史性的限制。人类的时间经验首先表现为其有限性（因此死亡在自我解释中具有重要意义）。

> 时间不仅是内感官的形式，而是整个人生的基本结构……我们的存在可以被描述为时间性。时间不仅仅是一种包围我们的形式，而是渗透到我们的整体存在和本质之

[1] ME, S. 675.
[2] 康德:《纯粹理性批判(第 2 版)》(康德著作全集第 3 卷)，李秋零译，北京:中国人民大学出版社，2004 年，第 54-55 页（B50-B51）。

中。它同样体现在数学中，尽管这一点常常被忽略……我们只能因为我们是时间性的存在，所以才能数数和计算。一个永恒的、无限的存在是不需要数数的。[1]

正如高斯所说，“上帝并不数数”，对于一个永恒的存在而言，无限序列在一瞬间就可完成。作为有限的时间主体，人类无法一眼看到无限的数字序列，只能一步一步在时间中展开，数数活动因此依赖于人类固有的时间性，这种时间性不仅揭示了人类的认识局限性，也表明数学概念（如数）是如何与人类存在的特定方式联系在一起的。此在时间中通过数学活动的有限手段把握无限，正是数学的本质特征。[2]

> 因此，数学在某种意义上是“人类想象的科学”（scientia imaginationis humanae），即使在其最抽象的推理中，它也始终与‘数’的概念息息相关，因而带有完全人类学的局限性。[3]

8.4 《算术哲学》中的潜无限与实无限问题

我们在第一章已经分析过胡塞尔《算术哲学》中数的直观定义的概念系统与形式结构的符号系统之间的张力结构和映射不对称性。在对希尔伯特的形式主义与布劳威尔的直觉主义的批判基础上，我们在这里将结合《算术哲学》中隐含的潜无限与实无限之间的构造性论述，进一步分析有限主体对本真数的认识以及高斯的上帝对于非本真数的认识和实无限的预设。

贝克尔认为数学是胡塞尔哲学的思想原点，现象学只有从数学的问题域出发才能开启。胡塞尔的数学哲学中实质上已经蕴含着并未本质上得到表达的现象学的构造研究。[4]因为胡塞尔的第一部著作《算术哲学》中集合论与数论的基本概念，尤其是“集合联结”的核心概念，实际上是通过回溯集合行为与计数行为的自发活动而得以阐明的，基本概念的意义正是在这些构造行为中得到论证的，且其特质在于它始终与“某物一般”（即对象性一般）的内在关联性保持一致。[5]这种关联性构成了胡塞尔算术哲学的基本张力结构：一方面是算术在主观、认知、具体行为中的实例化的有限性，也

[1] Oskar Becker，*Größe und Grenze der mathematischen Denkweise*，p. 158.
[2] ME, S. 670.
[3] ME, S. 738.
[4] 胡塞尔早期的《算术哲学》与心理主义的关系在第 2 章与第 7 章已经处理过，这里不再进一步论述。
[5] 奥斯卡·贝克尔：《埃德蒙德·胡塞尔的哲学（为其七十诞辰而撰）》，倪梁康译，《中国现象学与哲学评论》2016 年第 2 期，第 293-335 页。

就是在有限主体在时间序列中的潜无限构造。另一方面是普遍数学在客观演绎和理想超越领域的实无限特征。《算术哲学》的编者洛塔·埃莉（Lothar Eley）认为，对于无限性的数学认识构成了胡塞尔数学哲学的张力点。胡塞尔意识到只有考虑到实无限，才能建立一般算术，并使其有效。如果胡塞尔没有出版《算术哲学》的第二卷，即通过形式算术对无限性问题的彻底讨论，那么就意味着胡塞尔构建有限算术的计划注定要失败。数学的无限性必须被视为此种有限性算术的一种特殊形式。[1]在《算术哲学》中关于无穷数列的给予方式的问题中，胡塞尔的讨论回到了关于无限性的认识论本质。

> 考虑到这一点，高斯的著名断言：“ὁ θεὸς ἀριθμετεῖ ”（神在计算）并不符合一个无限完美存在的观念。戴德金将其释义为（参见《数是什么以及数应该是什么》）：“ ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει ”（人总是在计算），但由于其他原因，这种释义是不可接受的。我只会说：“ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει”（人在计算）。[2]

高斯的“上帝在算术”首先假定一种无限完美的理性能够直接地直观一切数学真理，包括无穷数列的实际构造。[3]但胡塞尔认为这种观念在逻辑上是荒谬的，并不符合无限完美的观念。因为即便对于上帝来说，世界也不是一个可计算的世界，或者一个已经被无限计算过的世界，以计算的形式描述神的“创造”根本上是错误的，自由的理性生活的不可计算的，通过超越论阐明的逻辑学中永远不会有一个可逻辑化的视域。[4]胡塞尔在对高斯的批评中还提到了拉普拉斯。拉普拉斯在《概率论哲学》中同样认为：如果一个存在（后被称为“拉普拉斯妖”）知道宇宙中每一个粒子的初始位置和速度，并且掌握所有自然法则，那么这个存在就可以精确地计算出宇宙过去的一切状态，并预测宇宙未来的一切状态。这意味着，假如我们对初始条件和自然法则有完全的了解，整个宇宙便是完全可计算的。[5]胡塞尔对“上帝在算术”的排斥意味着一种严格受逻辑和理性限制的数学观。即使是“上帝”也要受到关于本质的法则约束。换句话说，即便设想有一种无限完美的存在，这种存在也无法根本上突破认知逻辑上的必要限制，

[1] Hua XII, SS. xiii-xiv.

[2] Hua XII, SS. 192, Anmerkung 1. 相同的论述还可参见 Hua XI, S. 295。值得注意的是，胡塞尔在 1936 年《欧洲科学的危机和超越论现象学》的一个补充文本“关于心理学数学化的批判以及对高斯上帝概念的批判。针对《危机》的工作，§ 60”再次提到了对高斯的相关批评，参见 Hua XXIX, S. 203-205.

[3] 高斯在 1855 年 5 月 28 日写给亚历山大·冯·洪堡（Alexander von Humboldt）的书信中提到这个观点，参见 Gauss, Carl Friedrich.*Correspondence between A. von Humboldt and Gauss: On the Hundredth Anniversary of Gauss's Birth,* April 30, 1877, edited by K. Bruhns, Leipzig, 1877, p. 75.

[4] Hua XXIX, SS. 205-206.

[5] Laplace, Pierre-Simon. *A Philosophical Essay on Probabilities*. Translated by Frederick Wilson Truscott and Frederick Lincoln Emory, 1902, p. 4.

具有绝对知识和绝对自由的上帝仅仅是一个投射到无限之物中的人，胡塞尔因此说"人是一个有限化的神，而上帝只是一个无限化的个人"[1]。胡塞尔认为一个永恒和无限的存在是不需要计算的，而我们是有限的和暂时的存在，数学活动根植于人类有限理性及其符号化的构造能力，而不是基于一种绝对完美的、无限的认知，从而超出任何可能的理性边界。

因此，有限构造的符号性扩展是必要的，人在计算（ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει）的算术才是真正的算术，可以为有限主体在时间序列中意识活动的认识行为所固有的限制提供了一个解决方案。

> 如果我们可以对所有数进行本真表象（authentische Vorstellungen），就像我们对数列中的最初几个数的本真表象一样，那么就根本就不会存在算术，因为它将是完全多余的[...]。然而，事实上，我们的表象能力却是极其有限的。这种限制的事实源于人本身的有限性[...]正如我们将看到的，整个算术不过是为克服我们理性本身固有的不完备性而采取的一种由技巧性手段组成的总和。[2]

贝克尔在希尔伯特和胡塞尔的双重思想背景中展开他在数学实存方面的研究。他首先无法回避希尔伯特和胡塞尔之间的分歧：在数学哲学的基本立场方面，前者是典型的形式主义者，后者是坚定的直观构造主义者。贝克尔因此不得不回到希尔伯特提出的一个区分：直观可解释的数学与演绎形式化的数学之间的区别。关于这种区分的早期形式，我们已经在我们第一章中关于胡塞尔在其早期数学哲学中直观的可构造的数的概念系统与可扩张算法与形式定义数的符号系统中讨论。与希尔伯特和早期胡塞尔的不同之处在于，贝克尔对直观可解释数学的理解范围更广。对他而言，直观可解释的数学包括了他所描绘的扩展意义上的全部直觉主义数学。而对希尔伯特来说，直观解释的数学仅限于有限主义数学；而对于早期的胡塞尔来说，这一范围甚至更为狭窄，只包括有限数学的一小部分。与希尔伯特不同的是，贝克尔不再认为自然科学中所需的形式数学必须被证明是内在一致的，并因此可以通过直观解释的数学来证明其合理性。

贝克尔在《数学实存》中首先讨论了劳威尔、外尔的直觉主义和希尔伯特的形式主义在数学基础问题方面的争论。他将这场争论的焦点归结为这样一个问题："直观

[1] Hua XXIX, S. 206.
[2] Hua XII, S. 191-192.

的可构造性与形式的无矛盾性是否可以保证数学对象的实存”，并以此开始对“数学实存的存在论意义”的讨论。[1]

8.4.1 数（Zahl）与时间（Zeit）

亚里士多德认为时间（Zeit）是一种“数”（Zählen）。他在《物理学》中将时间定义为关于前与后的运动的数，我们通过时间来判断运动的多少或快慢。因此，运动的存在本身与数的存在紧密相关。时间之所以为数，是因为时间是对运动的计量，并最终展现为数的形式。[2]他认为数具有两种含义：“被数的数”与“用以计数的数”，亚里士多德在这里所强调的不是“数”本身而是“数数”，这符合他对数的第一种定义：时间作为关乎运动而“被数的数”。这里的数数正是作为序数的概念而使用。线性单向时间的度量可以看作是通过序数而刻画的，因为序数作为对顺序的形式表达，其本质就是亚里士多德所谓“前后”的关系。所有的意识都处于时间之中，数数及数本身的意义也在时间中展开和构造，数的现象学正是通过时间而通达（Zugang）。较大的数字只能在时间的数数过程中原初地（originär）把握，而时间序列作为数的原始形态，常常被理解为一种永远“未完成”的无限性：1,2,3，是在一个 n+1 的同一模式中逐步展开的迭代生成。每个数的生成都需要在时间中完成，无限原则上永远只存在于“总是下一个”的数数过程的开放视域中。

但相对于亚里士多德的潜无限概念，贝克尔指出，我们在前一章处理布劳威尔的选择序列和康托尔的超限数时，这些自由选择序列和超限过程代表了一种无限“序列”新的形式，但此前从未被视作是具有时间性的现象。[3]例如，在布劳威尔的直觉主义中，一个自由选择序列 $\{a_n\}$，对于任意 n，a_{n+1} 的值都不能通过一个元规则 R（它的唯一目的是“反规则化”）从 $\{a_0,a_1, \dots ,a_n\}$ 中推导出来。a_{n+1} 是独立生成的，每个 a_{n+1} 都是通过一个不可预测的外部输入（例如人类决策、随机事件）进行选择，且不属于当前任何已知规则的预测集合，它与之前的所有元素无必然关系。因此，在执行选择序列时，尽管我不断“选择”，但这种选择是“自由的”，即每次都是新的，产生了一个新的数，而这个数不包含在现有的任何规则中。这种选择是一种创造性的行动，而不是机械运算所能预测的结果。

[1] 倪梁康：《现象学的数学哲学与现象学的模态逻辑——从胡塞尔与贝克尔的思想关联来看》，《学术月刊》2017 年第 49 卷第 1 期。
[2] 亚里士多德:《物理学》，张竹明译，北京，商务印书馆，1982，第 249 页（219b-220a）。
[3] ME, S. 658.

另一方面，我们在前一章已经讨论过，类似于选择序列，康托尔的超限序数的生成过程避免了黑格尔所谓的“坏的无限”（schlechte Unendlichkeit）所导致的无限回退。尽管超限序数的生成原则（例如康托尔的生成原则和极限操作）具有重复性，例如，从序数β到其承继者$\beta+1$的过程类似于自然数的递增，但在极限序数的形成过程中，需要通过取所有小于该极限的序数的并集来定义新的序数。这不仅涉及不断引入新的简单符号（如数字或连接符号）σ_1、σ_2、σ_3 …，更在于每次过渡到极限序数的方式各不相同；必须不断重新定义康托尔从序数β到其继承者$\beta+1$的生成原则以及极限序数的形成过程。[1]

这种新的时间性与自然数及其潜无限不同，因为它不是基于反复应用同一种规则（例如）或单元。传统时间度量是通过“重复”同一个尺度（Maßstab）来完成的，这也是自然数，尤其是序数的基础。例如，欧几里得将数定义为由单元组成的多（即自然数可以看作单元的累加）。在新的无限的时间性中，时间不再是简单的、可重复的度量单位，而是进入了一种无法“测量”的状态，不能简单地被“数数”所把握。贝克尔将这种新时间性称为历史时间性（historische Zeitlichkeit），这种时间性不是机械的、均匀的，而是与历史的生成和变化相关联的时间。[2]海德格尔最早通过现象学的方式描述了这种时间性。在其著作《存在与时间》中，他区分了普通的线性时间与历史的时间性：普通时间是测量的时间，是自然科学中的时间概念，它是均匀、连续的，同质化的。历史时间性是更深层次的时间，涉及存在的意义，它是人类经验中不断生成的时间。

> 纯粹的历史时间性，总的来说，是个体历史生活的时间性。这种时间性也体现在某些数学现象中：如自由选择序列与超限进程。这最终引出了最后一个问题，即数学自身的意义是什么。[3]

8.4.2 超限数与选择序列的时间性与存在解释

贝克尔指出历史时间具有一种双重结构：一方面，历史时间具有“形式化图式”（formales Schema），这赋予它某种自然－时间性的特征。这意味着历史时间在某种程度上可以用形式结构来描述，但这种结构无法完全把握历史时间的本质。另一方面，

[1] ME, S. 659.
[2] ME, S. 660.
[3] ME, S. 674.

历史时间是一种非图式化的创造，同时也具有“永恒的消逝”或“持续的死亡”的动态。当我们试图从形式化角度理解历史时间时，它就显得“不纯粹”，因为它包含了一种与之异质的、非历史的因素；而当我们试图从历史性角度理解时，它又完全不可形式化，因为具体的历史实现是个别的、独特的，没有统一的形式。形式本身是非历史的，而历史时间本身是拒绝形式化的。

1) 超限数的时间性与存在解释

在历史时间的基础上，贝克尔认为，超限过程不仅能通过一种形式现象学的指明性（Ausweisung），而且还可以进行一种解释学（hermeneutische）解释，也就是“超限过程”不仅是纯粹意识的一种形式结构，而且是具体的、历史性的实际意义的现象。无限性的实际化意味着“无尽时间的现象”，贝克尔用赫拉克利特的“总是”、“变化”（ἀεί）标识这种根本性的具体现象，并认为它具有无限定(ἄπειρον)的不可知的特性，这种无限定性彰显了被抛入世界且沉沦于日常性中之此在的无阻碍状态（Hemmungslosigkeit）。贝克尔指出，在超限过程中具有“如此等等”（immer weiter）特征的第二生成原则“$\beta+1$”具体地呈现出两种表现方式：首先是我们在一般数列中见到的纯粹的往复（Wiederkehr），其次就是一种“永恒的轮回”[1]。相同者的永恒轮回（die ewige Wiederkunft des Gleichen）并不仅仅是物理世界中的事件或数学中数列的重复，而是对存在本身的重复性显现的揭示，每一次“回归”都以不同的方式展现存在的本质，因此它不仅是重复，也是生成。时间并非线性流动，而是一种面向未来的“投射”（Entwurf），每一次“回归”不仅是对过去的重复，也是对存在的重新生成。海德格尔将由此将时间性（Zeitlichkeit）作为一种敞开性的可能性，而永恒轮回通过重复揭示了时间的循环敞开。自由意志在无限重复中约束成可适用的规则，从而使“轮回”（Wiederkunft）显现，并使无限的开放性通过有序的有限结构被控制与展现出来。[2]虽然死亡构成此在的极限可能性，但数学活动的存在意义在于通过有限的方式来克服无限，将自由生成的序列加以规律化，也就是说，以法则约束自由的生成，从而使未来的幽暗得以澄明。

其次，根据超限数的两个生成原则，当某个特定的命名系统和某种到达极限的方式缺乏时，必须创造新的命名系统。这一进程主要依赖于已完成的内容；通过对每次

[1] ME, S. 758.
[2] ME, S. 759.

完成的无限过程和所洞察的无限视域进行反思，奠定于新的视域层级的超限结构便得以实现。超限进程既具有历史性的成分，又有非历史性的部分：总是相同的生成原则必须在不断变化的情境中寻找新的应用可能性，但这些可能性又由先前创造的形式所限定，同时又由它们所产生。历史时间并非仅仅是个体终结的序列，而是通过群体的世代生成表现出持存（Beständigkeit）与生成（Werden）的张力。世代相继的链条是由一种自然引发的再现循环，但每一“世代”所能承担与完成的任务却截然不同，每一代人在具体的历史风格（Stil）中仍以独特的方式生成新的可能性。[1]

2) 选择序列的时间性与存在解释

在传统数学分析中，严格规则定义的序列可被看作是天体的旋转或季节的更替“自然时间”（natürliche Zeitlichkeit）的类比，一种精确可预测、可重现的秩序。然而，“选择序列”则不同，每个新数的选择依赖于自由意志（有一定约束条件下的自由），不可预测且没有固定生成法则。尽管我不断“选择”，但这种选择是“自由的”，每次都产生了一个新的数，且这个数不包含在现有的结果集合中。这样的“自由生成的”序列不是单纯的数学游戏或抽象的形式构造，只能从历史时间的概念来构想。整个超无限过程便是将自身的精神（Geist）隐藏起来，只有借助数学的创造性行为才能使其显形并被发现。[2]

自由选择序列作为纯粹的历史事件形态，呈现出一种开放的、不确定的时间性，而只有历史化的“此在”才能经历这样一个自由生成的过程。在选择序列中，自由乃是此在作为敞开状态的根基，选择序列的动机来自某种完全任意、近乎‘超越性’的神秘原则，人们或可将其称之为“命运”（Schicksal），[3]同时，此在的历史并非一个预先计划与规划的产物，既非先验也非逻辑的产物，序列的开放性使得未来的结果是未定的（unbestimmt），但每一步的选择必定会发生（gewiss）。[4]这种“对未来的投射”与遵循已制定的计划并据此安排自身存在的方式无关。历史性的此在无限展开的时流中一次次面临“选择”，当某一特定选择的结果导致整个序列不再能延续时，布劳威尔称这种情况为“序列的湮灭”，在其历史时间的解读中，选择序列的湮灭意味着死亡（Sein zum Tode）作为此在存在的极限可能性。

[1] 超限进程的超越论意识构造的具体内容请参照前一章。
[2] ME, S. 758.
[3] ME, S. 759.
[4] ME, S. 669.

8.5 形式主义与直觉主义的两种数学认识论传统与现象学解释

贝克尔同意海德格尔的观点，即历史时间的经验有其独特的结构，这种结构并不能通过科学所描述的无穷、线性、客观的时间系列来把握。换言之，历史也不是由客观时间规定的无限向上的线性进步观。我们对世界的理解（包括语言和数学符号）、对意义的界定的整个解释过程都具有历史时间的独特性质。数学不仅是对自然的描述和抽象，同时也是人类精神的时间性成就。数学的这种精神化成就成为此在存在的一种方式。因此，理解数学的存在意义，需要关注它在历史中的意义积淀的形成过程和哲学动机。

> 在这些批判性研究的过程中，**我们会发现当前数学家正在研究的核心观点并非这个时代所独有，而是深植于历史的传统，这种传统可以追溯至古希腊的哲学和数学**。由于缺乏正确理解的历史反思，任何真正的哲学澄清都不能实现。因此，对于古代关于数学存在的观点进行系统性的梳理就显得格外必要。只有完成这些前期研究，我们才能为更好地深入研究真正的哲学问题做好准备……数学是应该建立在直观的基础之上，还是应该建立在形式公理化的基础之上？[1]

贝克尔认为理解数学的历史起源是理解数学存在的哲学前提。这种观点来自胡塞尔的历史认识论的理解：真正的历史说明（Historische Erklärung）问题与“认识论上”的论证或澄清是（Aufklärung）相一致的。我们在前面已经论述过，贝克尔将超越论的构造现象学作为自己研究的开端。他认为，从胡塞尔的《算术哲学》开始，超越论主要关注的就是真正的起源开端和构造问题。胡塞尔在《作为严格科学的哲学》中将现象学的哲学任务明确地规定为“追寻一切事物的根”。[2]从一门关注起源与追求本质的现象学出发，胡塞尔认为科学家（数学家）必须具有能够追溯其学科历史的全部意义构造物和研究方法的原初创立意义的反思能力，尤其是追溯所有在原初创立时未经细察而接受的意义遗产，以及所有后来接受的意义遗产的意义。[3]

> 历史从一开始就无非是原初意义构造和意义积淀之相互并存和相互交织的活的运动。不论什么东西根据经验作为历史事实被想起， 或是由历史学家作为过去

[1] ME, S. 445.
[2] 胡塞尔：《哲学作为严格的科学》，倪梁康译，商务印书馆，2009 年，第 66 页。
[3] Hua VI, S. 58.

的事实而表明出来， 它们必然具有自己内在的意义结构。[1]

对胡塞尔而言，整个欧洲精神的真正诞生在于希腊的原创造（Urstiftung）。贝克尔正是将数学对象存在的直观基础与公理形式化起源问题追溯至古希腊的哲学和数学的开端模式，并对其意义的起源和积淀进行重新激活，也就是胡塞尔针对欧洲科学的危机所提出的“对我们批判性科学和哲学处境起源的目的论—历史反思方法”[2]。贝克尔据此从“目的论—历史”的视角理解数学存在问题，对数学存在的直观问题和形式公理化的现代争论问题进行起源研究。他认为以胡塞尔对几何学起源为例，我们对于数学存在的理解不应该将其定位于作为现代科学核心的形式化方法的建立，而应该将其定位于古希腊哲学的兴起与思想的原初形态。按照胡塞尔的说法，这种原创造构成了理性精神的诞生及其特有的“精神形式”，其中包含着目的论的开端，对欧洲历史的目的论发展之澄清，尤其是数学精神在内的整个精神的生成，是在对原创造的反思中朝向这个目的隐秘的进展。[3]

8.5.1 柏拉图—莱布尼茨与亚里士多德—康德的两种数学认识模式

> 就数学哲学而言，必须将柏拉图与莱布尼茨联系起来，而将亚里士多德与康德联系起来。柏拉图和莱布尼茨显然都始于数学神秘主义。他们都是‘毕达哥拉斯主义者’，他们都最终认为数学在世界的构造中起到决定性的作用。他们都认为它代表了世界的形而上学和存在论结构[...]亚里士多德和康德则是批判者，是对所有神话遗迹和过度的理智对立的理性对抗者[...]他们都剥离了数学的神秘特征。数学家仍然是有限的人类；任何超越现象学可达性的无穷概念都被严格拒绝。[4]

贝克尔意识到构造论和非构造论在数学中的对立都有各自的长久历史谱系，并将其称之为从数学神秘主义到批判哲学的过渡。希尔伯特试图拯救经典数学的全部工作最终依然遵循着柏拉图-莱布尼茨的思维方式，而布劳威尔则是亚里士多德和康德思想的直接继承者。布劳威尔在他的就职演讲“直观主义和形式主义”中，将自己的立场描述为放弃康德的空间直观的先天形式，而坚持康德的时间直观的先天形式。[5]同时，

[1] Hua VI, S. 380-381.
[2] Hua VI, S. XIV.
[3] Hua VI, S. 72.
[4] ME, S. 747.
[5] Brouwer, L. E. J. “Intuitionism and Formalism.” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 20, no. 2, 1913, p. 85.

希尔伯特虽然在元数学直观理论中提出了一种先于逻辑与运算的康德式的符号构型的直观康德式，但其目的是保证数学一致性和逻辑推理中的作用。我们在第三章已经完整地讨论过希尔伯特元数学中的直观理论。康德强调数学必须与直观经验相结合，而希尔伯特的形式主义则将数学完全形式化，以完全形式化的方式表达了他的柏拉图主义，导致它无法解释物理现实，仅仅符合一种符号数学的观念。因此，希尔伯特的数学思想继承了莱布尼茨符号数学的传统，而非康德的数学直观。希尔伯特与莱布尼茨既追求彻底的逻辑化，同时也寻求通过感性直观的字符（Charaktere）来使形式概念可直观化（Veranschaulichung）。

在此基础上，柏拉图和莱布尼茨两人属于数学神秘传统的毕达哥拉斯主义者。他们认为有限的个体与无限的宇宙之间存在着某种神秘的共同感应，这种感应以符号的方式展现形而上学—存在论的结构，超越其有限的存在领域，通达对世界本源（Weltgrund）的认识。[1]而亚里士多德与康德则相反，他们剥除了数学的神秘意义。在他们看来，数学不过是一种抽象的观察方式，而不能触及事物的核心本质。（根据亚里士多德，数学将“不可分离”的事物视为“分离的”（τὰ οὐ κεχωρισμένα ᾗ κεχωρισμένα）；而康德则认为，数学本身“无法提供真正的知识”。数学家终究仍是有限的人类，任何超越现象界的无限概念都被严格排除。[2]

因此，对形式主义与直觉主义之间的潜无限与实无限的根本对立的根源的回溯首先可以追溯到柏拉图和亚里士多德之间的冲突。柏拉图认为数学对象独立存在于可感事物之外，并处于理念和可感事物的中间，并在《蒂迈欧篇》中通过四种正多面体作为万物的本原来构造世界。[3]亚里士多德认为这种观点是错误的。我们可以从理念与中间体之间再分离出另一类中间体，它既不是数也不是点，既不是空间量也不是时间。如果这是不可能的，那数学对象也不可能与可感事物相分离而独立存在[4]。数学对象并不是比物体更高级的本体，它们在本性上并不先于可感事物，而只是定义上在先；它们不可能独立存在于某个地方。[5]因此对于柏拉图来说，数学是超时间性的，无限的数是已存在的事物，实无限因此是合法的。而对于亚里士多德来说，数学思维必须通过

[1] ME, S. 749.
[2] ME, S. 748.
[3] Timaeus. *The Dialogues of Plato*, vol. 3, edited by B. Jowett, Oxford University Press, 1892, 3rd ed., 1924 impression, p. 56b.
[4] 亚里士多德:《形而上学》，吴寿彭译，商务印书馆，1981 年，第 1077a9—14 页。进一步的论述可参见林夏水：《亚里士多德的数学哲学》，《自然辩证法通讯》1988 年第 4 期。
[5] Aristotle. *The Works of Aristotle*, vol. III, edited by W. D. Ross, Oxford, 2nd ed., 1928, p. 1077b11—14.

抽象和理想化来进行，无限仅仅是一种潜能，有限主体只能承认潜无限的存在这使得数学中引入了人类的、主观的、因此也是时间性的因素。潜无限与实无限是形式主义与直觉主义的争议的根本问题之所在。

根据莱布尼茨的观点，潜无限与实无限之间是连续的。这种连续性原则根源于一种适用一切的表象观念。莱布尼茨认为单子的本质在于表象，单子之间表象清晰程度的不同和变化构成了认识的连续性原则，因此不能将其局限于仅表象事物的一部分，宇宙中的一切事物都在不同感知清晰程度的单子之间的相互作用之中实现和谐。从可以微弱感知（petites perceptions）现象的单子开始，单子的等级越高，就越趋近于上帝，而上帝最清晰的表象是可以把握实无限的观念的。[1]对莱布尼茨而言，从潜无限到实无限的连续性源于一种与上帝的秘合的神秘信仰。因为数学神秘主义者指向的是一种根本无法被人类理性与直观所触及的超人类的、宇宙性的同感（sympathetischen）关联，在莱布尼茨那里，这种关联通过其表象原则得到了最清晰的表达。这种表象原则意味着观念性（Idealität）与现象性（Phänomenalität）之间并不存在根本的对立。康德批评了莱布尼茨的这一“表象理智化”（intellectualised appearances）原则。他指出直观和概念分属不同的人类认识能力，莱布尼茨没有将知性与感性视为我们表象的两个不同来源，而试图通过概念获得对象知识的尝试是一种“超越论的两可性”，即将纯粹理解的对象与表象的对象相混淆。[2]为了反对莱布尼茨的“表象理智化”，康德将感性直观称为“派生的直观”（intuitus derivativus），而把智性直观称为“源初直观”（ intuitus originarius） 。源初直观意味着一种“自身将其客体的存在性给予我们”的直观，区分于我们的“派生直观”，这种直观只能在外在于它的现实中被动接受它的内容。对康德来说，只有神的智性有能力跨越理智与直观的鸿沟。这就是他说的原型智性（intellectus archetypus），这个知性并不表象它被提供的客体，客体自它的表象活动中被自身给予或生产出来。[3]从现象学的视角来看，对“表象理智化”这一原则还有另外一种解释。我们可以将上帝理解为“理想化的人类”，赋予他一种理想化的人类认知能力，换句话说，将他界定为一个极限（Limes），人类可以在观念上无限接近这一极限。但从潜无限到实无限的过渡是绝对且永远不可能的，即使是通过一个“无限过程”，

[1] 莱布尼茨：《莱布尼茨文集》第 2 卷，段德智、陈修斋译，商务印书馆，2019 年，第 327、334、344 页。

[2] 康德:《纯粹理性批判(第 2 版)》(康德著作全集第 3 卷)，李秋零译，北京:中国人民大学出版社，2004 年，第 214-215 页（B326-327）。

[3] 康德:《纯粹理性批判(第 2 版)》(康德著作全集第 3 卷)，李秋零译，北京:中国人民大学出版社，2004 年，第 225-226 页（B408-410）。

这种过程本身也是潜无限的。实际上，胡塞尔在这一点上应该与康德一致，后者认为“原型智性”或“原初直观”完全超越了人类的理解能力。

8.5.2 两种数学认识模式的直观理论分析

现象学的立场来看，“现象”（Phänomen）不再是与“本体”相对立的“假象（Scheinen）”，而是一种“自身显现”（Erscheinung）。康德严格区分了感性与知性，并否认两者之间具有连续过渡的可能性，而莱布尼茨则认为二者之间存在某种连续性。贝克尔从“空的意向”与“充实的直观”这一基本关系重新解释了莱布尼茨和康德的基本争论。对莱布尼茨而言，观念性（Idealität）与现象性（Phänomenalität）之间并非是对立的，空的意向可以不断接近直观的充实，并因此存在着一种过渡，但在康德的批判哲学中，这种过渡的进程并非真正的意向被本质转化，而更像是意向在自身内部的一种“自我充实”（Sich-Erfüllen）的过程。贝克尔因此强调了一个现象学立场的关键点：并非所有在逻辑上无矛盾且清晰的概念都能获得直观性的充实支持。纯粹逻辑的明晰性不必然带来直观的充实性，一些概念可能是“清楚而明晰”的，但依旧是空乏的，它们缺乏可直观化的内容。这一结论将“空的意向”的哲学地位凸显为纯粹逻辑的可能性与实际的直观可及性之间的界限。因此，康德的本体论区分仍是稳固而有效的，并未因莱布尼茨设想地从空的意向到直观充实的连续性而被否定。

但是康德式的这种区分如何处理仅在逻辑层面“可能”而在事实层面始终“不可直观的对象？贝克尔据此提出了“否定之无”（nihil negativum），即在逻辑上自相矛盾的“无”，纯粹属于“非物”（Unding），无论在什么意义上都不可能被直观。其次是“消极的无”（nihil privativum），即并非逻辑上的矛盾，但并不存在直观对应物。这种“空的观念”在逻辑上是清晰的，但永远无法获得与直观相称的理论可及性，因此是“消极的无”。来自于莱布尼茨意义上这种空的意向意味着形式主义的无矛盾性本身并不确保这些形式对象在现象学意义上获得可直观的意义。数学中的许多结构不过是逻辑可能性与形式公理系统中的产物，它们缺乏与直观世界的直接对应，比如对七面体或在三维欧氏空间中设想的规则千面体，都可以无自相矛盾的而逻辑地构想，却无法获得直观充实。从现象学角度，它们并非“真实存在者”，既无法直观化也无经验证成，但又是数学家日常操作与思考的对象。这一张力将导向对数学存在性的深层追问：数学实体的存在意义不在于直观感知中，也不完全在于逻辑完备性与无矛盾性中，而要在更深的现象学分析乃至存在论与形而上学层面寻求解释。

我们在方法论上必须面对一个新的问题领域：从可及性与无矛盾性这对二元对立中生成的数学存在定义，并不能满足我们对实在意义的追求，数学的形式与逻辑保障并未自动转化为对真实世界的完全理解与征服。这为进一步的哲学阐释指明了方向。[1]

8.6 形式主义数学的兴起："晚开的花"与"精神的堕落"

贝克尔在《数学实存》中对形式主义的兴起进行了一项具有历史学—目的论的数学史分析数学在起源之初是作为证明和直观的思想事业，但形式数学的思维模式其实在古代也同样已经存在，而这种思维模式在现代性中成为主导模式，严格意义上来说是作为十九世纪晚期的产物。通过对莱布尼茨、笛卡尔和亚里士多德的回顾，他展示了一条清晰的思想路径：数学形式主义并非凭空产生，而是通过不断的哲学反思与科学进步，一步步从古代思想家那里发展而来的。形式主义如今被理解为一种纯粹形式的、对未解释符号的操作，与它相关的数学基础的哲学问题逐渐被遗忘，以至于数学变得越来越难以理解自身的哲学本质。贝克尔由此将形式主义数学定义为数学精神史上绽开的一朵"晚开的花"（Spätblüte）以及一种"精神的堕落"（Entartung）。[2]

8.6.1 贝克尔对数学形式主义的分析：从亚里士多德到莱布尼茨的普遍数学

贝克尔在《数学实存》第六节中关于"西方形式数学的兴起"的分析中认为，亚里士多德在他对第一哲学研究对象的描述中，已经在某种程度上奠定了形式数学的基础：亚里士多德提到数学家研究的是抽象概念，通过去除诸如重量、轻重、硬度等感官属性，而仅仅保留数量和连续性，并且将这些属性作为数学研究的对象。[3]贝克尔同意亚里士多德的观点，他认为尽管数学家考察的是不同种类的对象（点、线、平面、立体），并且考察它们中的不同方面（位置、相称性等），但他们以抽象的方式对待感官对象，只保留其数量和连续性，因此最终只有一门科学：几何学。亚里士多德在本体论中关于数学抽象的论述意味着"普遍数学"思想的胚芽，尽管这一思想在古代

[1] ME, S. 755.
[2] Gérard, Vincent. Oskar Becker et le problème philosophique de l'existence mathématique , *Philosophie, vol. 136, no. 1*, 2018, pp. 3-10.
[3] 〔古希腊〕亚里士多德：《形而上学》（K卷第 3 章 1061a28–b6），吴寿彭译，北京: 商务印书馆，1959，第 245 页。

并未完全发展，但数学首先被规定为量和数的科学。[1]

普遍数学的概念始于笛卡尔。笛卡尔在《哲学原理》第 55 节中提到，普遍性适用于持续、顺序和数量等多种事物的属性。笛卡尔认为，如果我们仅仅把这些东西看作是它们存在的方式，而不是混杂了它们作为实体的概念，那么我们就可以非常清楚分明地理解什么是持续、顺序和数量。[2]在《原则》的“第四原则”中，笛卡尔定义了什么是“普遍数学”的科学：

> 我开始我的研究时，首先思考了“数学”这一术语究竟意味着什么，并探讨了为何除了算术和几何学外，天文学、音乐学、光学、力学等学科也被称为数学的分支。[…] 这一思考让我意识到，必定存在一门普遍的科学，能够解释所有与秩序和度量相关的问题，而不论其具体内容为何。这门科学应被称为普遍数学（mathesis universalis）——这是一个意义深远且已经明确的术语——因为它涵盖了使这些学科被称为数学分支的所有内容。[3]

贝克尔认为，笛卡尔的这一观点表明，数学在某种意义上已经具有了现代形式化的维度，而且与亚里士多德的抽象数学观是一致的，并由此启发了莱布尼茨在 1695 年的一篇未完成的论文《普遍数学》中试图找出数理逻辑、代数、微积分、组合学和字符之间可能存在的联系。当贝克尔正在完成《数学实存》的写作时，在 1926 年 8 月 22 日写给迪特里希·曼科的一封书信中，他指出了对莱布尼茨进行数学史考察的哲学意义：

> 我目前正忙于一项关于“数学实存”方面的大部头著作，主要探讨“直觉主义——形式主义”之间的对立，并且在很大程度上结合了历史性的和系统性研究。在该项工作中，我需要简要讨论莱布尼茨对于“基础争论”的立场。在这方面，我从您精彩的论文“莱布尼茨的普遍数学与个体形而上学的综合”[4]中获得了很多帮助。特别是您对字符学（Charakteristik）的详尽和深入阐述对我来说非常有价值。[5]

贝克尔认为莱布尼茨的数学思想是一种过渡性思想，它连接了古代的本质追求与

[1] ME, S. 698.
[2]〔法〕勒内·笛卡尔：《哲学原理》，张卜天、鲁博林译，北京：商务印书馆，2024，第 55 节。
[3] Descartes, René (20 May 1985). Rules for the Direction of the Mind. *The Philosophical Writings of Descartes*. Translated by Cottingham, John. Cambridge University Press. pp. 19-20.
[4] Mahnke, Dietrich. “Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmetaphysik.” J*ahrbuch für Philo sophie und phänomenologische Forschung*, Bd.7, 1925, SS. 305-612.
[5] 贝克尔致曼科1926 年8 月22 日。Cf.Aust, Bernd Peter, and Jochen Sattler, editors. Briefwechsel mit Dietrich Mahnke. In *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, Wilhelm Fink Verlag, 2005, S. 246.

现代的形式化倾向。莱布尼茨发展“普遍数学”（mathesis universalis）的目的不仅是要建立一种统一的通用字符（characteristica universalis），而且试图通过这种通用文字表达所有可能的科学知识，并将数学视为一门超越具体学科同时涵盖一切的普遍科学。在贝克尔看来，正是这种对数学作为逻辑和符号体系的理解，使得莱布尼茨成为现代数学形式主义的真正奠基者。通用字符通过脱离具体内容而纯粹追求形式结构和逻辑一致性的尝试方案直接开启了数学形式主义的可能性，尤其是希尔伯特形式主义体系的确立。

贝克尔最终得出结论：从莱布尼茨的符号学，到希尔伯特的形式主义，再到现代逻辑和集合论的兴起，数学形式主义是思想史上一个不可避免的发展阶段。数学始终作为一种独特的精神实践形式，不仅是描述世界的一种工具，更是一种特殊的“存在方式”（Seinsweise），反映出人类对普遍性、抽象性以及逻辑一致性的追求，其核心在于形式化了的生活意义。这种数学形式化的追求不仅影响了数学的发展，也深刻地影响了精神的整个进程。

8.6.2 从数学的形式化到自然的数学化：生活世界的意义丧失

根据我们在第一章的分析，胡塞尔最早面对的问题是《算术哲学》中的符号数学问题。从数的概念系统到符号系统的奠基方案失败之后，胡塞尔此后并没有从超越论现象学的角度再次完整地深入讨论数的直观以及符号起源的形式化过程。但是在《欧洲科学的危机和超越论现象学》中，胡塞尔将启蒙运动的最高成就（牛顿和伽利略的科学模式）和他自己一生工作的最高成就（严格科学的超越论现象学）的意义与它们的起源问题联系起来，[1]以几何学起源问题研究为例分析了符号的逻辑起源，显示了数学中的形式化问题如何抽空了作为自然科学之起源的生活世界的意义问题。[2]这里的逻辑起源的问题并不是今天所谓的形式语言和一种演算，而是数学从关于数和量的学科向公理形式化转变及其背后隐藏的认识论解释。

在近代伊始对形式化的真正发现，首先是由韦达在建立代数的尝试中完成的，

[1] Hopkins, Burt C. *The Origin of the Logic of Symbolic Mathematics: Edmund Husserl and Jacob Klein. Indiana University Press*, 2011, p. 175.

[2] 1983 年出版第 16 号文本关于几何学思考的文稿被认为是“拟定”《危机》文章第 60 节的开头。胡塞尔重又转而反对心理学的数学化并获得算术的基础问题。为此，他联系上他的早期著作《算术哲学》主要涉及《危机》一书中第 9 章《伽利略将自然数学化》(Hua VI, S. 33-76),以及三个附录(Hua VI, S. 405-459),它们共同构成了胡塞尔关于几何学的算术化的起源探究。

因此是在数论和量论的演绎技术化的尝试中完成的。[1]

胡塞尔认为这里的形式化首先解释为韦达发起的算术的代数化运动使得人们由对数的直观行为完全替代了数的符号行为。韦达首先区分了类的筹算术（logistica speciosa）与数的筹算术（logistica numerosa）。在此基础上，他认为算术（logistica numerosa）侧重于计数的活动；而代数（logistica speciosa）则是施行于事物的类或形式的一种运算方法，由此用字母的符号来表述希腊数的概念而形成了符号数体系的运算。[2]韦达建立的代数方程的符号运算韦达建立的代数方程的符号运算的第一个结果就是数系的迅速扩张：负数、无理数、虚数、复数等数系成员在 18、19 世纪迅速相继出现。数的符号总是先于数的意义而首先到场。因此，胡塞尔认为早在伽利略之前，希腊数学传统中对具体量或数值的操作的算术思维就在韦达的符号代数的推动下已经转变为对“一般数”“数的关系”和“数的法则”的普遍探讨，从而进入了一种远离直观经验的“超越”层面。这种以符号演算为核心的代数化方法接着被迅速应用到几何学乃至更广泛的空间—时间形态研究，人们将几何体系全面地用代数形式加以表达，形成了“几何学的算术化”，几何学原初的直观构造物被抽空意义变成了代数构造物。[3]胡塞尔敏锐地把握到了 19 世纪数学形式化的这个前奏即将出现的后果：

> 伽利略本人也是继承者。继承的几何学，所继承的进行“直观”设想、证明、直观构造的方式已不再是原初的几何学，甚至就是在这种“直观性”中它已被抽空了意义。[4]

他认为从伽利略时代起，新科学就用理念化了的自然暗中代换了前科学的直观的自然，不断运行的算术化导致了一种完全普遍的形式化，数学家置身于算术化了的空间一时间领域的同时，置身于形式化了的普遍数学之中，我们面对的是数学的自然，在公式中给出的自然，只有通过公式才能解释的自然，但是胡塞尔指出，这种自然数学化的描述公理的法则系统实际上永远也达不到真正自明的自然知识，所有公理系统的无矛盾的一致性系统都是具有假设性的。[5]M.克莱因将数学的这种形式化认识定义为

[1] Hua XVII, S. 71.
[2] 克莱因，张卜天：《现象学与科学史》，《科学文化评论》2013 年第 10 卷第 4 期，第 69-83 页。
[3] Hua VI, S. 64.
[4] Hua VI, S. 49.引自埃德蒙德·胡塞尔：《欧洲科学的危机与超越论的现象学》，王炳文译，商务印书馆，2017，第 67 页。
[5] Hua VI, S. 47;50;72.

数学真理的丧失。公理只是导出结论的推理基础，其重心也不是关注构造它的概念的真理，因此也不用关心这些概念的物理意义。当公理和实在之间产生某种联系的时候，这种物理意义至多只能是发现真理的向导。数学从实在性中裂变成为不关注概念含义的数学游戏， 数学的真理只是建立在公理的无矛盾性上，几何学的公理化割断了它与对象的直观所予的联系，而代数逻辑则是与含义无关的一种逻辑公理发展，这成了十九世纪盛行的观点。许多人把这种真理意义的丧失和公理系统构造的任意性看成是新的数学的存在那些在真实世界里没有直接对应物的概念被引进并逐步被接受，迫使人们承认数学是一种人为的并且多少带有任意性的创造物，而不仅仅是从自然界里引导出来的本质上是真实事物的一种理想化，康托因此说，数学是纯粹的也是自由的，它可以不在意实在性而自由创造自己的概念。[1]但是随着数学形式化的进一步发展，形式主义数学的公理语义学带来了胡塞尔所关切的深远问题：数学存在的意义是与此在关联的生活世界相背离的吗?

贝克尔进一步追问了数学形式主义背后隐藏的意义和关切是什么。他指出形式主义无休止地扩张的动机在于对演绎的无限进展的关切。纯粹演绎的数学不再是某种关于客观真理的知识，而是通过不矛盾的推导与论证，将某种形式的前提作为最终目标，从而达到自身独立的数学概念。这里的一个关键问题是数学家遗忘了自身具有的本体维度，即其自身的“操持与意义模式”（Sorge und Bedeutsamkeit）。因此，形式主义的数学认识论的这种自身遗忘接近于海德格尔所提及的“生命对自身的封闭”（Abriegelung des Lebens gegen sich selbst）。[2]

8.7 数学对象的两种存在方式与实存解释

我们在第五、七章已经处理过现象学的范畴直观的视角下如何处理直觉主义（构造作为数学存在的保证）和形式主义（非矛盾作为数学存在的保证）定义之间的争论问题，并在第八章继续讨论了数学对象的三种构造模式以及超限数的意向迭代和视域分层的构造。贝克尔从胡塞尔那里借用了“真理逻辑”和“后承逻辑”之间的逻辑分层，并对直观主义和形式主义所作的现象学描述强调了这样一个事实，即直觉主义按照真理逻辑进行的，而形式主义则是按照后承逻辑进行的。直觉主义本质上是证明与

[1] 克莱因，莫里斯：《数学：确定性的丧失》，李宏魁译, 湖南科学技术出版社，1997 年，第 106-112 页。
[2] ME, S. 762.

构造的数学，其根本问题是可判定性（Entscheidbark），而形式主义是本质上是演绎的数学，其根本问题是非矛盾性（Widerspruchsfreiheit）。采用证明数学或演绎数学的观点，会导致两个不同的数学基础问题。对于证明数学而言，非矛盾性的问题并不是原初的，因为如果数学实体是通过构造或构造过程获得的，它们作为“现象”存在于其“现象学的存在”中，其一致性便是理所当然的。而对于一种纯粹演绎的数学，判定性则退居次要地位，数学实体不必被构造才能被接受为存在，从现象学角度，它们并非“真实存在者”，既无法直观化也无经验证成，但又是数学家日常操作与思考的对象。这种构造取决于有限主体理解的缺陷，并不是根本的。贝克尔采用了现象学的方法，探讨数学对象的“显现”过程。他认为，数学对象的存在不是简单的客观实体，而是一种在直观中显现的、通过数学活动构造的存在。这一观点与布劳威尔的直觉主义思想相契合，强调数学对象的构造性和生成性应该根据我们原始的构造主义和人类学概念来思考，是人类直观构造的结果。

> 至此，对数学存在问题的初步讨论显示，我们在方法论上必须面对一个新的问题领域：从可及性与无矛盾性这对二元对立中生成的数学存在定义，并不能满足我们对实在意义的追求，数学的形式与逻辑保障并未自动转化为对真实世界的完全理解与征服。这为进一步的哲学阐释指明了方向。[1]直觉主义—形式主义之间的对立根植于知识（科学）以及最终生命本身的“人类学”和“绝对”观念之间的根本哲学对立。[2]

因此，直觉主义与形式主义之间的对立实际上植根于对客观知识与生活本身的不同理解：一种在“人类学的”与“绝对的”认识论观点之间的对立。这两种认识观点分别代表了将数学基础建立在人类经验和实践之上（人类学的）与将其建立在一个独立于人类存在的、客观的宇宙基础之上（绝对的）的对立。这一张力将导向对数学存在的深层追问：数学实体的存在意义既不在直观感知中，也不完全在逻辑完备性与无矛盾性中，而是要在更深的现象学分析乃至存在论与形而上学层面寻求解释。

8.7.1 数学认识活动的此在时间性解释

贝克尔认为我们必须通过对直觉主义的人类学解释来解决形式主义数学中数学对

[1] ME, S. 755.
[2] ME, S. 625.

象的存在问题。与希尔伯特不同的是，贝克尔不再认为自然科学中所需的形式数学必须被证明是内在一致的，并因此可以通过直观解释的数学来证明其合理性。贝克尔开始主张，只有从历史—解释学的立场出发，才能完全理解直觉主义。海德格尔在 1925 年《时间概念史》的演讲中也认为布劳威尔和外尔为代表的直觉主义本质上受到现象学的影响。[1]因此，从现象学的分析出发，对数学存在之争进行的解释会偏向一种类似直觉主义的观点。直觉主义要求数学对象必须通过可实际完成的构造来呈现，这一要求的实质主张是：所有数学对象必须通过事实上可完成的综合才能达到。这里的“综合”指的是可操作的、可实现的步骤与过程，而非纯粹的抽象推理或假设的建构。真正“存在”的数学现象并非是纯粹的观念或逻辑结构，而是只能存在于那些事实上可以完成的语法结构中。换句话说，数学现象的存在依赖于其可实行（Vollzug）性，只有那些可以在实际构造中被执行的语法结构，才是真正的数学现象。这里的“存在论”更多地是对“事实性解释学”（海德格尔）的描述，而非传统意义上的超越性本质学。[2]可实行意谓着数学活动和数学现象的实际构造过程被置于中心位置。数学存在不是独立于人类活动的某种“绝对存在”，而是与人类的历史性存在紧密相关。因此，数学获得了一种“人类学式的基础”（anthropologische Fundierung）。这里的“人类学”强调人类的事实生活，数学的基础来自个体或世代的具体生活经验，这种具体的存在使数学具有了历史性和人类学的特征。

> 人类的实际生活[…] 也是数学的存在论基础。[3]

8.7.2 数学实践作为一种生活态度

海德格尔通过对希腊词源“ta mathemata”（意为可学的或可教的东西）的分析，揭示了数学因素的原初涵义。他指出，“ta mathemata”不仅仅指具体的可学习对象，所有存在者被规定为可学的物，这种规定源自数学因素。数学因素（das Mathematische）在海德格尔看来，先于数学本身存在，是一种形而上学的设定。制约和决定了现代科学的形式和普遍性。因此，数学不仅定义了物的可学性，还预先勾勒出物的基本轮廓，使得科学能够在这种数学化的框架下运作。与海德格尔对数学进行存在论的简单拒斥和粗暴的批评不同，贝克尔通过存在论进一步深化和辩护了数学实践作为此在的存在

[1] 海德格尔：《时间概念史导论》，欧东明译，北京，商务印书馆，2009 年，第 4 页。
[2] ME, S. 636.
[3] ME, S. 636.

方式的合理性。数学（μαθημα）并不只是某种超越的客体，也不是单纯的思维产物，数学本质上是一个“关联现象”（Bezugsphänomen）。因此，它的存在论重点在于这种关系的现实展开方式——即在具体生存的生命历程（daseienden Lebens）中被经验的独特方式。贝克尔将数学活动视为与“哲学活动”（philosophieren）和“音乐活动”同样的实践活动。这意味着，数学的存在意义系于数学化活动这种活的意识过程，而非对超现象对象的指涉。数学活动（musizieren）类似的一种“生活态度”（lebendige Haltung），而非仅仅是一项“业务”（Geschäft）。[1]从存在论意义上来说，μαθημα只是面向“数学活动”（mathematisieren）的意识相关项（noema）。我们必须有意识且哲学性地承认数学是“一门人类的科学”这一显而易见但常常被忽视的事实，数学家的工作本身也必须成为现象学解释的主题。他借用海德格尔的“事实性”（Faktizität）概念，提出数学的存在应该被理解为“存在的方式”而非仅仅是“逻辑系统”，并且提出对数学存在的领会需要在“精神”（Geist）与“自然”（Natur）的张力结构中进行领会。

> 为了理解数学的存在意义，必须将整个存在论问题放置于历史性与非历史性之间的普遍张力中，即放置于“精神”与“自然”之间。精神（如果我们在这里理解这个词）是完全历史性的，即通过其与本真的时间性的特定方式来定义。[2]

8.7.3 数学活动的超时间性与数学家的克服历史性

贝克尔认为，为了理解数学的存在意义，我们必须将整个存在论问题放置于历史性与非历史性之间的普遍张力中，也就是具有历史性的“精神”与具有时间性“自然”之间。时间性是历史性可能的条件。而历史性则是此在的时间性的存在方式。“精神”是通过历史性所表现的、并被时间性本身所标记的存在。贝克尔认为，“精神”并非一个超时间的实体，而是体现于自由的创造性活动之中，并与历史性时间构造密不可分。自然时间是规则化的、重复循环的；而历史时间则是此在演历的时间，具有不确定性和不可逆性，死亡是“此在”最极限的存在方式，此在始终处于与自然性死亡的对抗中，在这种矛盾中，数学被赋予了一种“克服时间性”的身份：通过理性活动克服此在历史性（historiches Dasein），确切地说其真正的目标为克服死亡作为历史性此

[1] ME, § 6.
[2] ME, S. 321.

在的终点而进入超越时间性的普遍且永恒的数学领域。[1]

根据贝克尔的分析，在数学作为克服此在历史性的理性活动出现之前，自然化的原初生命并不理解死亡，也不会被死亡的意识所困扰。它拥有一种“自然的可见性”（Naturansichtigkeit），并借助于神秘的魔法力量（如原始人的观念思维）与世界互动。然而，觉醒的历史性生命以牺牲自我意识（Selbstbewußtsein）为代价换取了理性认识能力，同时也失去了原始生命的自然和谐状态。[2]作为一种认识自然的工具，数学更是人类自我意识发展的象征。数学逐渐从原始仪式中剥离，演变为一种纯粹的逻辑形式，成为一种永恒的存在。但作为一种纯粹的心灵姿态（seelische Haltung），数学化（Mathematisieren）已经蕴含了存在觉醒（Wachsein）与超时间（überzeitliche）的特征，它结合了历史性与自然性的存在。但这种“存在觉醒”必然会受到限制，因为它不可避免地走向自我遗忘（Selbstvergessenheit），这种“自我遗忘”表现为一种时间之外的存在状态，数学家本身的生活状态常常是与其实际的历史性此在相互疏离的，沉迷于数学的永恒和秩序的抽象世界而遗忘此在所沉沦操劳的世界。但是数学家是否就将纯粹的数学活动”沦为历史生活中的一种“单纯的企业活动”（bloßer Betrieb），一种脱离现实的存在方式呢？这种自身遗忘自然化的生命状态依然未找寻到自身的“存在意义”。[3]

数学家的自身遗忘不仅意味着是对此在的实际性生活的遗忘，而且同时也是对数学存在自身的遗忘。纯粹演绎的数学不再是某种关于客观真理的知识，而是通过不矛盾的推导与论证，将某种形式的前提作为最终目标，从而达到自身独立的数学概念。形式化的最终动力来自对演绎推理的无限进程的沉迷，因为在游戏数学的公式游戏中，对无限的把握和预见在某种意义上就是可能的。[4]数学的这种追求无限而克服历史性的“存在绝对主义”（Existentialabsolutismus）将一种高尚、升华的意义附加到空洞演绎的数学游戏过程中，通过无限的演绎进程，好像数学认识就能够以某种方式“接近”或“揭示”实无限或者超限结构，从而带来一种克服此在历史性问题和死亡作为最极限的存在方式的幻相，通过现象学的理性批判，我们从前一章对超限数和潜无穷的意识构造可以得出符号推演并不自动通达与之相对应的超越感性符号标记的实在领域。这种形式主义的认识产生的“深邃性”更多是一种由形式化本身所诱发的幻相，在希

[1] ME, S .760.
[2] ME, S .761.
[3] 具体参见海德格尔在《存在与时间》中“此在的存在”的论述。
[4] ME, S. 762.

尔伯特的形式主义纲领下，“数学游戏”不过是表征其符号体系内在一致性的隐喻，而非对生活意义或世界真理的终极启示。[1]

从数学的意识活动（noetisch）的方面来看，数学活动满足于一种内在的封闭性要求，数学的“事实性”（Sachlichkeit）不需要将意识超越于演绎系统自身以外的超越的客观性中去进行进一步的证明。因此纯粹的演绎一致性虽然是可被理解的，但并非自然与精神之间真正的数学映射和一致性认识。贝克尔认为，在形式主义的数学精神中，感性符号的游戏操作无法通达实在，人们无法将完全清醒的数学精神与原初生命的自然状态的满足感相融合，这种精神状态下，历史性与自然性地失去了平衡，而且是偏向历史性的，数学只是此在为了克服死亡的畏惧而无限进行的自身遗忘的演绎游戏：

> 希尔伯特意义上的“形式—数学的游戏”也绝非可作为生活方式、作为某种游戏活动，或者更确切说，作为一种以游戏方式的存在来完成某种伟大（之目标）的途径。[2]

8.7.4 从直觉主义到形式主义的预示现象学

根据我们在前面对以形式主义为代表的柏拉图—莱布尼兹数学神秘主义与以直觉主义为代表的亚里士多德—康德的分析表明：一方面，希尔伯特的形式主义数学在存在论上无法通达自然实在；另一方面，在人类经验的范围内，数学直觉主义以及更广泛意义上的现象学构造主义在认识论上无疑是正确的，但是形式主义数学中的不可构造性部分在自然科学中的应用展现了构造主义观念的局限性。因此，无论是数学神秘主义还是数学批判主义都无法在根本上解决问题。面对这一困境，贝克尔指出，现代物理学的成就迫使我们承认一个基本的事实：那些无法通过直观构造且不可理解的符号数学的超越—超限（transzendent-transfinite）等形式结构确实使自然的结构凸显出来，在自然结构与数学精神之间存在着深层而神秘的和谐关系。因此，空洞的“公式游戏”与宇宙的形而上学结构有着某种神秘的关联，其背后存在某种超验、神秘的理性根基。因此，纯粹“公式游戏”在这里再次被赋予了形而上学的意义。但是这种关联的意义（Sinn）和根据（Grund）是什么？这一推断将问题引向更深的存在论与形而上学层面：数学与世界形而上结构之间的联系何以可能？[3]

1 ME, S. 763.
2 ME, S. 763-764.
3 Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H.

8.7.5 预示现象学的提出：对本质意识现象学与历史解释现象学的批评

在数学神秘主义的传统认识中，数学与自然之间存在着一种和谐性的符号预示，我们仅凭经验直观或逻辑演绎并不足以阐明其最终根基。如果世界要能为我们有限的意识所把握，并真正呈现为一个“世界”，那么它至少在某种程度上必须是形态学上可描述的并具有一定结构规则的，使人类能够通过数学来理解和刻画它的实在性。这种和谐性并非简单的数学模型对自然现象的映射，而是数学在某种程度上揭示了自然界本身的内在结构和秩序。由此，数学神秘主义者认为通过和谐关系，我们能够在其中窥见上帝的理念世界。贝克尔认为，在这一点上，可以将莱布尼茨以及其后继者希尔伯特和外尔的“符号数学”思想联系在一起。[1]

> 我们的光谱序列，被整数量子数所支配，在某种意义上相当于古代七弦琴的三音和弦，毕达哥拉斯学派在 2500 年前由此推断出了自然现象的和谐；而我们的量子数使我们想起了毕达哥拉斯学说似乎赋予整数的角色，不仅是作为属性，而且是真正的物理现象的本质。[2]

毕达哥拉斯学派发现，弦的长度与音高之间存在简单的整数比例关系。例如弦的长度为原来的一半时（1:2），音高会比原来高一个八度；长度为三分之一（1:3）时，音高为原来的两倍，等等，这一发现奠定了音乐理论的基础。而在量子力学中，主量子数和角量子数都严格是整数，自旋量子数的半整数性质使它在数学上区别于主量子数和角量子数，但它仍然是量子力学模型中的一个整数扩展，整数（和半整数）在这里通过量子数的不同层级与轨道性质直接关联，从而描述了电子的量子状态，外尔认为量子力学的整数性质与毕达哥拉斯所强调的整数比例之间存在相似性。贝克尔受到外尔对量子力学与数学之间神秘和谐关系的论述的影响，提出了一种将形式主义进行直觉主义解释的数学神秘学传统的解释路径：

> 在这项新的研究任务中（即对超验—形而上意义的重新诠释中），或许可以类比于解释学的（hermeneutischen）研究方向，提议一种预示现象学（mantische Phänomenologie），现代数学神秘主义（如希尔伯特和外尔的观点）或许可在此找

Weyl. ” *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002.

[1] ME, S. 766.

[2] Weyl, Hermann. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Edited by Olaf Helmer-Hirschberg and Frank Wilczek, Princeton University Press, 1949, p. 185.

到位置。[1]

贝克尔在 1926 年前后将自己的现象学观点发展成“预示”（mantisch）现象学。贝克尔使用“预示”一词指理解自然的任何数学尝试都需要通过一种符号预示，其前提是自然与数学之间某种超验、神秘的理性根基。[2]预示现象学首先区别于胡塞尔经典现象学意义上的“观念”（ideative）现象学以及海德格尔新现象学意义上的“解释学的现象学”。正如符号数学是在把直观主义推向极限之后出现的，预示现象学也是在突破旧的本质现象学的极限之后出现的。他认为“解释现象学”与“预示性”现象学这两个新方向都是在早期的“描述”现象学的基础上发展起来的。[3]在对“精神”和“自然”的综合研究中引出了现象学的两个重要方向：海德格尔解释学方向与他的预示现象学方向。因为解释性现象学为了能够解释此在的存在问题，深入到了生存论现象层面，但它必须是“精神科学”导向的此在的自身显现，并且始终是有限的。因此，“解释性”现象学需要超越到超现象的层面，探讨自然的形而上学结构。

> 虽然解释现象学仍然在某种程度上深入现象层面，但它并没有真正进入人类存在的意义领域。为了能够解释人类存在，它必须是“精神科学”的导向，并且在某种意义上始终是有限的。因此，“ 预示”现象学需要超越到超现象的层面。我将预示现象学（mantische 或 divinatorische）与解释（hermeneutischen）相对立，认为预示的领域超越了历史精神的界限，是对某种形而上学“在形而上的意义上”的渗透，在这里从形而上学开始，形而上学（更确切地说，自然哲学的形而上学）和自然哲学几乎重合。[4]

贝克尔认为他对包括超限数在内的数学形式结构进行的胡塞尔现象学的纯粹意识构造和海德格尔的人类学解释并不能完全解释数学形式主义中不可构造但确实有效的部分。海德格尔的历史—解释现象学的方法虽然声称可以解释一切，但我们在自然中面对的一些现象只能通过抽象公式进行描述，因此无法在解释学上进行有效解释，贝克尔尝试用数学一自然科学立场的“示明”方法来抵御泛解释学的危险，并据此来划

[1] ME, S. 768.

[2] ME, S. 766-768.贝克尔“预示现象学”的进一步研究参见 Pöeggeler, Otto. “Oskar Becker als Philosoph.” *Kantstudien*, vol. 60, no.1, 1969, pp. 298-311.

[3] 贝克尔致外尔，1923 年 4 月 12 日。Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl.” *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, p. 190.

[4] 贝克尔致外尔，1926 年 8 月 16 日。Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl. *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, p.190.

定后者的界限。贝克尔同时批评胡塞尔的现象学分析只涉及“想象”（phantasy）的组合可能性相关，而不是与具体现象相关，[1]并且本质直观构造也无法解决形式数学中具有空的意向但无法被直观充实的一致性定义的数学对象。他提出，我们现象不仅仅需要对关联现象进行诠释，（Auslegung, ἑρμηνεία），还需要对其进行不同方式的“示明”（Deutung，divinatio, μαντεία），后者同属于一种存在论的研究。通过这种转向，我们不再满足于传统现象学的解释学方法，而是引入预示现象学的认识模式来思考数学存在与宇宙和谐、上帝超越性之间的关联。超越数学形式主义与数学形式主义两种认识模式的对立，进入更深层次的存在论与形而上学考察。

> 这种意义上，我愿意将“预示的（mantische）”现象学视为旧的“描述性（ideative）”现象学的合法继承者：“解释”是“构造”的方式，而现象学通过阐释一路走来，从而合理地进入超现象领域。因此，我现在的观点是，数学直觉主义的终结标志着对符号数学的关注，而这并不意味着超现象的开始。[2]

贝克尔认为，预示现象学不再只是对“存在意义”（Seinssinn）的解释，而是进入到对“超验的存在根基”（transzendenten Seinsgrund）的重新“示明”（Erdeutung）领域。因为数学在某种意义上是古代的魔法艺术、占星术和炼金术等早期实践传统的合法继承者，二者都是受到有限把握无限的原始精神支配，通过预言和控制来支配自然的能力，而且这两种认识都是符号性的认识和操作。因此，数学家和巫师都是在某种超验领域中进行符号操作活动。数学家在其“脱离自我”的纯粹状态中，与处于原始恍惚状态的人类之间存在某种类比关系。贝克尔应用了外尔在其自然哲学中所引用的赫拉克利特的箴言作为他的预示现象学与外尔的符号学之间的关联和启发：“那位拥有德尔斐神谕的王者（指阿波罗）既不言说，也不隐藏，而是指示。”[3]

> 德尔斐神的神谕是我解释现象学的必要关联！[…]在这个意义上，我也想把“预示”现象学视为较早的“观念”派的合法继承者：“示明”是经过现象学洗礼并因此合法地达到超现象领域的“构造方式”。[4]

[1] ME, S. 543.

[2] 贝克尔致外尔，1926 年 8 月 16 日。Cf. Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. “Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl. ” *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, p. 190.

[3] “ὁ ἄναξ, οὗ τό μαντεῖον ἐστι τὸ ἐν Δελφοῖς, οὔτε λέγει οὔτε κρύπτει ἀλλά σημαίνει.”（《哲学手册》II A. S.65）Diels 编号第 93 号片断。

[4] 最后 2 封信。贝克尔致外尔，1923 年 4 月 12 日。Cf. Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. “Mathematics and

贝克尔认为预示现象学的认识论目的是数学与宇宙之间的形而上学结构与符号性认识，因此应该属于观念论的传统，同时他的这种哲学是综合胡塞尔本质意识现象学与海德格尔的解释现象学，因此是合法的达到了现象领域的构造方式。但贝克尔对于预示现象学并没有进行系统的构建和操作方法上的说明，只是作为一种数学实存的考察结论和尝试性方法被提出来。但贝克尔一再强调从内在现象学（immanent-phänomenologisch）所能直接把握地从纯粹经验领域和现象的阐述转进入预示现象学“超现象性”的领域，也涉及到与上帝的超越性相联系，在某种意义上就发生了一种超现象领域（trans-phänomenale）的跃迁，我们需要谨慎地对那超越经验界限的形而上学结构进行合适的“示明”，而不只是“解释”，批判地保持理性界限与现象学立场的清醒，避免无节制的神秘主义泛滥。

> 未来的现象学进路若朝向这种“预示”的方向展开，就可能需要对我们先前理解的自然、历史和数学存在意义进行更加深刻的存在论和形而上学研究。[1]

8.7.6 贝克尔的预示现象学的不充分性解释及其批评

贝克尔对数学实存问题的海德格尔解释学风格和神秘主义路径引发了经典现象学家莫里茨·盖格尔（Moritz Geiger）、迪特里希·曼科（Dietrich Mahnke）、外尔以及新康德主义恩斯特·卡西尔（Ernst Cassirer）的批评[2]，这促使贝克尔进行回应。盖格尔认为贝克尔的数学实存研究本质上是对数学进行人类学中心主义的错误解读。外尔难以贝克尔将数学的超限理论以及物理学中量子力学这些不可直观理解的部分知识解释为一种充满海德格尔解释学意味的神秘学指津，并且和自己的符号理论关联在一起，声称此举“将使现象学在具体科学中名誉扫地”[3]。外尔与贝克尔的争论在上一章已经讨论过，我们在这里主要讨论曼科从数学形式主义和胡塞尔现象学的角度出发对贝克尔关于数学直觉主义的海德格尔解释和神秘倾向的预示现象学的批评以及贝克尔本人所作的回应。

迪特里希·曼科在 1902 至 1906 年期间在哥廷根大学追随希尔伯特和胡塞尔学习数

Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl.”*Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, p. 291.

[1] ME, S.768.

[2] Geiger, Moritz. Review of Becker’s Mathematische Existenz. *Göttingische Gelehrte Anzeigen, vol. 47*, 1928, pp. 401–419;Cassirer, Ernst. *Die Philosophie der symbolischen Formen*. Vol. 3, Bruno Cassirer, 1929. English translation: *The Philosophy of Symbolic Forms*. Vol. 3, Yale University Press, 1957.

[3] 贝克尔致外尔，1926 年 7 月 2 日-7 日。Cf. Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl. *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, pp. 174-175.

学和哲学。在胡塞尔的指导下，他于 1922 在弗莱堡完成了博士论文《莱布尼茨对普遍数学和个体形而上学的综合》，另著有讨论同感问题与主体间性的《新单子论》。作为希尔伯特与胡塞尔在哥廷根时期共同的学生，曼科从胡塞尔现象学的数学认识论背景出发，分析论述了希尔伯特的元数学与胡塞尔的流形论之间的内在关系问题，胡塞尔本人对这篇文章进行了回应和评论，[1]我们在第 4 章中也已经处理过这个问题。胡塞尔认为曼科比自己的其他任何学生都更为亲近，称呼他为自己的老学生。[2]如果说曼科是胡塞尔的希尔伯特式学生，那么贝克尔则是胡塞尔的布劳威尔式的学生。贝克尔和曼科 1922 年 7 月在胡塞尔弗赖堡的家中为庆祝曼科获得哲学博士学位而相识，两人的学术交流由贝克尔同曼科讨论莱布尼茨在形式主义与直觉主义中争论中的地位而开始，基本上是始终围绕着前者所代表的胡塞尔的形式结构的现象学方法与后者所捍卫的直观构造以及进一步的海德格尔式的人类学方法之间的对立。

曼科对贝克尔关于数学实存的海德格尔解释和数学认识的预示现象学的反对意见主要基于希尔伯特—莱布尼茨的立场。他认为主要分歧点是：在纯粹数学中是否可以不使用包括范畴直观在内的直观构造而只通过演绎一致性证明保证数学认识的有效性？作为莱布尼茨主义者和希尔伯特的学生，他认为自己必须毫不犹豫地捍卫这一观点。自然在严格意义上是超越有限的，我们无法通过有限的直观的认识进行完全把握，因此在缺乏直观的情况下，我们必须满足于符号性的认识行为。曼科指出，莱布尼茨、希尔伯特和外尔已经证明，即使我们无法证明通向超越—超限的途径和方法，我们至少也可以通过符号来对自然进行代现，符号演绎过程的概念构造必须保证其无矛盾性作为基本的必要条件。在此意义上，我们作为有限的认知主体只能通过定义明确的感性直观的符系统来理解代现和理解实无限以及超限结果。曼科认为自己并不是要质疑超越论现象学的这一普遍原则，也就是贝克尔所提出的“可及性原则”：任何对象都必须在意识中具有一个直接的可能的通达途径，而不仅仅是作为符号的代现而认识。因为一个物自体的世界对于任何意识来说都是不可认识和想象的。如果能够成功地用直观内容的充实符号意指的空的概念形式，真正保证其存在，并更接近其内在的充实性，而不是仅仅满足于符号描述。曼科认为贝克尔对康托尔超限数的意识构造正如高斯为虚数的存在进行几何直观的辩护具有同等意义。曼科认为贝克尔通过此在的时间性对数学实存进行现象学的解释过程中，此在作为历史一精神的生成者，通过对数学

[1] Brief. III, S. 391;442.
[2] Brief. III, S. 407-409.胡塞尔致曼克，1921 年 10 月 17 日。

存在的自身思义把握其历史性，对精神生活的历史现象进行研究，这种现象学—数学史的研究风格可以等同于狄尔泰所开创的深入历史理性批判的精神科学道路。但是曼科指出，将这种方法运用到数学中时候，我们可能只能理解特定于人类的数学本质，而数学本身却力图摆脱人类意识的特殊性，甚至最终实现完全的抽象化。如果彻底地按照海德格的解释学现象学，自然的不可认识论。因此，需要区分胡塞尔的普遍意识的现象学作为数学、自然科学的基础与海德格尔的解释现象学作为人文科学的基础：

> 因此，我更倾向于以胡塞尔的“普遍意识”现象学作为精确科学的基础，而海德格尔的解释学现象学，将胡塞尔与狄尔泰和约克伯爵综合在一起，由于其对意识的人类学特性化，可能更适合作为人文科学的基础。……我觉得海德格尔对其新方法的描述相当晦涩，充满了黑格尔式的模糊，而您的阐述对我来说则立刻清晰明了。这再次证明了您和胡塞尔一样，受益于良好的数学训练，而海德格尔和黑格尔显然缺乏这种训练。[1]

贝克尔对曼科的批评进行了回应。他认为符号数学与预示现象学是分别通达自然认识的两种方式，并不存在根本上的矛盾。首先是人类—直观主义的数学，根据构造现象学和解释现象学的原则，它首先是一种被动的、接受性的认识。我们从给予内容出发通过形式化与形式显现进行本质把握与解释活动。另一种是形式主义—符号主义数学，尤其是我们在上一节他所主张的预示现象学，是主动的、生产性的认识。这种认识不依赖于任何给予内容，自由地创造观念的形式世界，然后再选择形式系统中相合的可以作为物理学的概念框架。但这种自由创造并不意味着摒弃所予之物。因为无法被充实的空的意向的形式无必须依靠感性直观的符号进行非本真的代现进行思考。其次随着所予内容的不断充实，可能性形式系统中可接受的形式选择将会逐渐收敛，最终在理想的极限情况下获得确定且单义的自然形式系统。当这两种认识方法被完全贯彻时，它们仅在方向上相反，预示现象学并不是未经理性批判的泛滥意义上的神秘学。[2]

[1] 曼科致贝克尔，1927 年 8 月 9 日。Cf.Aust, Bernd Peter, and Jochen Sattler, editors. Briefwechsel mit Dietrich Mahnke. In *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, Wilhelm Fink Verlag, 2005, S. 259-263.

[2] 曼科致贝克尔 1927 年 10 月 12 日。Cf.Aust, Bernd Peter, and Jochen Sattler, editors. Briefwechsel mit Dietrich Mahnke. In *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, Wilhelm Fink Verlag, 2005, S. 269-273.

8.7.7 胡塞尔的理性目的论对预示现象学的补充性解释

我们在上一章已经论述过胡塞尔深入研究过贝克尔的教职资格论文，并将其视为现象学基础上的外尔连续统、爱因斯坦相对论的综合研究。但对于《数学实存》似乎并非如此，贝克尔在两部作品之间，从胡塞尔现象学转向了海德格尔解学，并以一种综合胡塞尔的现象学、海德格尔的解释学来解释数学直觉主义与形式主义关于数学对象的存在问题，最终发展出超越于二者之上的预示现象学。根据舒曼的评论，尽管贝克尔的出发点是数学，但他最终对海德格尔的思想依赖还是要强于胡塞尔。[1]在给其助手兰德格雷贝的信中，胡塞尔也表达了对他前助手立场的转变并过分依赖海德格尔的遗憾。[2]这也可能是胡塞尔在《数学实存：数学现象的逻辑学与存在论研究》出版大约 10 之后才开始阅读其第二部分的原因。[3]由于胡塞尔在《纯粹现象学与现象学哲学的观念》出版之后就已经离开了数学哲学与逻辑哲学的问题视域，而是转向了超越论主体，甚而是生活世界与交互主体性学说的系统构建，[4]他并未对贝克尔的数学实存问题进行现象学目光的注意。但我们从胡塞尔的文本中可以重构出他对预示现象学的可能的批评态度，尤其是他所阐述的理性目的论可以作为进一步的补充要素。

贝克尔认为自然与精神之间前定的和谐结构需要预示现象学来显现这种超验的数学结构。同样的，胡塞尔也认为自然与精神处于一种必然的联系中，因为我们自身无法忍受生活在一个不能被理解地充斥着偶然和死亡的世界中。没有精神的理解和构造，自然便不成其为自然，而如果没有自然的存在，精神的构造也就没有意义。自然有着精神性的规定，精神也有其自然性的规定。每一个在直观中被把握的事物，除了其构造性的意义之外，还有一个外部的、不确定却并非任意的意义视域。[5]胡塞尔认为自然与精神（数学精神）之间存在着一种“奇妙的目的论”：

> 将自然世界还原为绝对意识的过程，实际上产生了某种类型的意识经验与精确规则体系之间的关联，在这些体系中，作为意向性相关物的世界，在经验直观的领域中构成了形态学上的秩序，也就是说，这是一个可以有分类和描述性科学的世界。此外，从物质层面来看，正是这个世界可以通过数学自然科学的理论思

[1] K. Schuhmann, „Anmerkung des Herausgebers“, in H. Spiegelberg, „Als Studentbei Husserl: Ein Brief vom Winter 1924/25“,in a.a.0., S.243, Anm. 16.

[2] Edmund Husserl, *Briefwechsel* IV: S. 269.

[3] Husserl-Chronik, S. 484.其余相关论述可进一步参见倪梁康：《反思的使命》第 2 卷，商务印书馆，2024，第 710-717 页。

[4] Brief.VI, S. 282.

[5] Hua XXXII, S. 12;16.

维，作为一种“显现”被确定为遵循精确自然法则的物理自然。在这一切中，由于实现事实的理性并非要求其本质的那种理性，因此，展现出一种奇妙的目的论。[1]

虽然胡塞尔与贝克尔都承认自然与精神之间具有和谐性的目的论，但胡塞尔在这里提及的目的论并非贝克尔的神秘性的预示现象学背后与上帝相关的超越性目的论，而是现象学中与理性目的论相关的构造理论。胡塞尔认为自然的合理性蕴含着一种可以数学认识的自然是可能的，他进一步分析了在这种目的论中的数学物理学的自然与形态学的自然之间的关系。在一个无限的开放的世界中必然有一个理性可以把握的同样的形态学（Morphologie）的世界，它作为形态学的构型而被把握为观念世界。[2]形态学的自然科学一种直观构造的自然科学，我们在其中对事物存在的直观构形进行分类和进一步的描述，通过本质直观获得形态学本质，将无法对自然进行完全理论物理化的东西加以形态学地系统化，虽然这种系统的和本质的形态学不具有严格的形式化特征，但它总是与自然处于相合中，并且时刻起着引导作用。[3]因此，胡塞尔对预示现象学的直接批评是，他首先认为直觉主义不能堕落为神秘主义，而是要从形态学所描述的自然中产生的清醒任务[4]，这种清晰的任务就是最终作为一切近代哲学的隐秘憧憬的纯粹现象学，它在理性主义所面临的神秘主义、经验主义以及人类学主义的错误路径之间找到自身的位置。[5]

按照贝克尔的解释，预示现象学中的符号预示不是物理学中的符号操作和认识，而是试图揭示自然认识与数学物理学的符号化的过程，使它们恰恰在某处重新结合在一起的一种前定和谐，这种符号方法起源于毕达哥拉斯的数学神秘主义。贝克尔认为量子力学的形式主义方法就是应用了一种难以理解的形式主义，运用符号化表征一种超越的现实，以一种预示或占卜的方式推测出前定的和谐关系，并非逻辑推理发现或直观意义解释。[6]而胡塞尔所讨论的则是内在意识如何切中超越世界的问题：意识作为世界的一个部分，又如何呈现世界。这个世界是纯粹意识通过还原和构造的世界，是通过连续的意识综合活动不断构成且无限进行的，而不是贝克尔所认为的前定的和谐

[1] Hua III/1 , S. 110.
[2] Hua XXXII, S. 250.
[3] Hua XLII, S. 162.
[4] Husserl, *Phenomenology and the Foundations of the Sciences. Third Book of Ideas*, translated by T. Klein and W. Pohl (Martinus Nijhoff, The Hague 1980).p.83.
[5] Hua XXXVII, S. 129.
[6] Becker, O. “Das Symbolische in der Mathematik. ”*Blätter für deutsche Philosophie, vol. 1*, 1928, pp. 347–348.

中一个预先存在的超验神秘的世界。为了理解逻辑命题和数学命题的最终有效性，胡塞尔认为必须首先把起源问题从心理学与自然的混淆性解释中解放出来，自然是永恒的，意识相关项的某物是其所是，且始终保持同一性。而自然的显现是从不同方面，通过不同的侧显向我们显现出来，这种显现从来不是绝对的。但心灵的对象则作为其自身绝对的显现，心灵对象在心灵本身之中是一种“现象”，其显现既是一种“绝对的”东西，同时又“进入一种绝对之，在此刻显现，但进入滞留中。因此，一个自然事物可以通过重复一种本质上相同的经验来研究和分析，而一个心灵对象却只能通过反思、通过记忆中的滞留，通过想象和回忆的变样来重新考察。一个自然对象尽管是“时间性的”，但相对于我们的研究始终保持不变量，而心灵的对象则进入意识的绝对流之中。[1]心灵对象，或者说狄尔泰意义上精神对象的历史，这种历史并非在自然时间中发生，其意向起源属于“意识生活”，而意识本身主要是作为一种由“内时间性”确定的“绝对之流”而被构成的。因此，内时间性是意向起源的普遍形式。这种对象在意识中显现的实际历史与意义生成的意向历史，原初构造与意义沉淀的交织构成了理性目的论的意向历史。根据胡塞尔的说法，探究一个对象首先意味着对其客观性进行悬置，然后寻求其“构造性的起源”，再现其“意向起源”。以几何学的起源这种数学概念的历史为例的分析表明，任何作为“意义”单元或“意向”单元的对象，都包含着关于其构造的“积淀历史”（sedimented history）。

> 历史主义——它要想从受时间约束的人类的神秘的性质或其他统觉方式的观点，**阐明数学的历史的或认识论的本质——是根本错误的**。对于有浪漫主义心情的人来说，数学的历史上的东西及其史前的东西中，神话的—神秘的东西，可能特别有吸引力；但是沉湎于数学中的这种纯粹历史事实的东西，也就陷入了浪漫主义，而忽略了真正的问题，忽略了内在的历史的问题，忽略了认识论的问题。[2]

胡塞尔认为，真正的历史说明与认识论的论证是一致的，历史性问题最终是哲学本身的问题。我们在这里又一次发现胡塞尔对贝克尔通过数学史进行数学认识的神秘化解释可能存在的反驳，并且指出了对数学认识的神秘化解释的前提是我们已经分析过的此在的时间性问题，并且用内在时间性进行了意向历史的重新解释，它构成了数学史的真正“内在历史”（Innengeschichtlichkeit），在其中表现出一种贯穿于历史整

[1] 克莱因，张卜天：《现象学与科学史》，《科学文化评论》2013 年第 10 卷第 4 期，第 69-83 页。
[2] Hua VI, S. 386;476-477.

体中的目的论的理性。超越论关注的是真正的起源和构造问题，胡塞尔在《作为严格科学的哲学》中将现象学的哲学任务明确地规定为“追寻一切事物的根”。包括数学知识在内的一切知识都是普遍意识的构造成就，都有其理性根源。意识生活具有一种普遍的目的论结构，一种朝向“理性”的性向，甚至一种朝向理性的彻底倾向，因此指向着正确性，以及指向对不正确性的消除。[1]这种理性目的论贯穿于历史整体中赋予历史以统一的意义。因此，哲学与科学应该是揭示人类本身“与生俱来”的普遍理性的历史运动。[2]因此，哲学不是别的，而是从始至终的理性主义，理性主义“在自我阐明（Selbsterhellung）的不断运动中但它是按照意向与充实的运动之不同阶段自身加以区分了的理性主义：它是从哲学最初在人类中出现开始的，处于不断自身阐明的运动之中的理性。[3]胡塞尔也将理性认识运动所要达到的终极完善称之为“隐德来希”（entelecheia, ἐντελέχεια），希腊文原意是“拥有自身的完善”[4]，他认为正是基于这个目的论，理性在世界中实现其本质能力。

所有意识在通向完善的道路上，在万物中起支配作用的是诸隐德来希的方向。它们以目的论的方式规定着发展。[5]

8.8 本章小结

本章在上一章对数学对象的超越论构造解释的基础上，对数学对象进行了时间性和存在论解释。首先从历史性方面阐述直觉主义与形式主义之间的对立植根于亚里士多德—康德的批判数学哲学与柏拉图—莱布尼茨的数学神秘学传统。进一步的分析表明，这两种数学认识的对立源于对生活本身的人类学理解与绝对认识的观念论之间的矛盾。数（Zahl）与时间（Zeit）的关系表明数学作为此在的实际生活的存在方式，康托尔的超限进程和布劳威尔的自由选择序列不仅是纯粹意识的一种形式结构，而是此在的具体的、历史性的时间现象。数学认识的理性活动是数学家为了克服此在的历史性和死亡而无限进行的自身遗忘的演绎游戏。贝克尔认为数学对象的意识构造和人类学解释并不能完全解释形式数学与自然结构之间的和谐一致性问题，他基于柏拉图—

1 Hua XVII, S. 143.
2 胡塞尔:《欧洲科学的危机》，王炳文译，北京，商务印书馆，2016 年，第 29 页；第 332 页。相似论述还可参见 EU, S. 24.
3 Hua VI, S. 334-335.
4 Hua XVII, S. 218.
5 Hua XLII, S. 17.

莱布尼茨的神秘学传统，提出了“预示”现象学。曼科基于莱布尼茨—希尔伯特立场，批评了贝克尔对数学实存的海德格尔解释和预示现象学进路。贝克尔在回应中认为符号数学与预示现象学是分别通达自然认识的两种方式，并不存在根本上的矛盾。最后，我们运用胡塞尔的理性目的论对预示现象学的神秘性进行了认识论的解释。

第 9 章 结论

从数学现象学出发，有一条道路通向哲学的最高领域，亦即一门“一般理性”及其客观“观念”的明证的形而上学。[1]

——迪特里希·曼科

本文在现象学视域内讨论了数学对象的存在论问题，通过形式分析的系统建构与直观综合的本质构造两条数学认识论路径，论证了胡塞尔的数学现象学的可能性。我们依次阐述并尝试解决了在第 1 章的引言中提出的三个子问题：（1）分析了胡塞尔算术哲学中的思想张力结构，以及其在数学基础发展中的哲学根源；（2）运用超越论现象学的直观和构造理论，重新处理了胡塞尔早期未完成的数学问题，进而建立一门现象学的数学认识论；（3）通过超越论现象学的数学认识论，为数学直觉主义与形式主义之间关于数学对象的存在论争议提供了一种数学现象学的解释方案。

对于第一个问题，我们首先分析了胡塞尔数学背景中柏林数学学派与哥廷根数学学派的认识论模式差异。前者的分析算术化使得虚构数的概念和意义问题开始显现，而后者的几何公理化使得几何概念与对象直观之间的关系彻底分离。我们首先将胡塞尔早期的数学思想推进到他在柏林数学学派传统中关于变分计算理论的博士论题研究，然后通过微积分的形而上学问题争议，考察了胡塞尔在分析的算术化进路中提出的算术哲学方案，认为数概念的构造系统与符号定义系统之间的奠基关系的不对称性无法解决数系扩张中虚数的存在难题。为了解决虚数的存在难题，我们进一步分析了胡塞尔与希尔伯特在哥廷根数学学会上分别以哲学的方式和数学的方式提出的两种不同的“完备性”概念，胡塞尔的完备性概念基于相对完备性与绝对完备性的流形论方案。从胡塞尔对虚数存在的流形论解释方案可以得出，希尔伯特的完备性是一种满足一致性定义的句法完备性，而胡塞尔的完备性是一种蕴含意向性和模型论解释的语义完备性。最后，通过分析数概念的构造系统、符号的定义系统以及两种流形论之间的认识

[1] 迪特里希·曼科：《从希尔伯特到胡塞尔：现象学，特别是形式数学现象学的初步导论》，于宝山译，《现代外国哲学》2023 年第 1 期。

论的不对称性，我们得出结论：现象学的突破源于胡塞尔在算术哲学和纯粹数学中关于数概念起源的形式建构和直观构造之间的张力结构。这种张力结构隐含于胡塞尔数学背景中的两种数学认识模式：首先是柏林数学学派的分析算术化引起的数概念的直观起源问题，其次是哥廷根数学学派的几何公理化导向的形式化的流形论建构。这种双重张力的结构反驳了当前学界流行的单一化解释，即将胡塞尔现象学思想的起源归结为柏林数学学派或哥廷根数学学派的影响。

对于第二个问题，本文在胡塞尔早期数学思想中直观构造与形式建构的张力结构的基础上，探究了数学对象的范畴直观问题。首先对经验范畴对象、混合范畴对象及纯粹范畴对象三类本质类型展开分析，对比了总体化、理想化、形式化在内的三种范畴直观模式，指出每一种类型都有其独特的综合充实模式，并不存在一个统一且单一的直观模型。其次讨论了范畴直观的对象直观侧的奠基性定义与意义充实侧的分节相合性的两种定义，阐明了范畴直观与感性直观之间的类比论证问题，指出了感性直观的连续综合与范畴直观的分节综合在行为方式上的相似性和差异。在此基础上，从第二种范畴直观定义出发讨论了以无感性内容、全时性、无对象性作为认识特征的数学对象的范畴直观，提出了数学对象的范畴直观是一种意义充实层级的意向性相合和间接分节综合，并非是对象的绝对给予。因此，数学对象的范畴直观不能仅仅依赖于表象模式，而应转向数学范畴的概念分析与公理化过程。在范畴直观中，给予的模式总是依据范畴的本质，意义的充实总是先于对象的直观。本文最后以胡塞尔博士论文中求解极值的变分法为例示，比较了变分（Variation）计算的极值求解与想象变更（Variation）的本质直观在操作方法上的相似性，前者属于求解极值的最优化认识，后者属于直观本质的同一性认识，二者在操作方法上具有相似性，由此展现了胡塞尔自身思想在数学与现象学领域之间的连续性。

在数学对象的范畴直观的论证基础上，本文继续探究了数学对象的超越论构造。首先划分了三种不同的数学构造类型：（1）基于感性直观的理想化的数学对象（2）可被范畴直观所把握的数学形式对象 （3）由公理系统所建构的一致性和无矛盾性的但无法范畴直观的数学对象，比如康托尔的超限数。第三类构造物属于“不矛盾的规律性”范畴，而不属于胡塞尔的“形式本体论”。我们首先讨论了胡塞尔基于意向性之链和“如此等等”（Und so weiter）的构造模式对于潜无限的构造，指出意向性迭代不仅仅停留在线性序列中的可数无限的反思意向性中，更重要的是它涉及对整体视域的

层级结构的迭代反思 $v_{n+1}=f(v_n)$。贝克尔将康托尔超限数的两个生成性原则与胡塞尔的线性反思迭代和视域层级的意识构造相对应，由此论证了意识现象学可以作为康托尔超限数的两个生成原则的本体论基础。在贝克尔的基础上，我们论证了第一个生成原则对应于从当前的反思阶段β的反思过渡到下一个反思阶段β+1，也就是每次新的反思都必然建立在前一次反思的基础之上，这是一个基本的、直接的反思层级。第二个生成原则对应于我们从无限嵌套的反思迭代序列推进到它们的极限或边界，是一种以对线性指向的迭代反思为基础的整体迭代反思。基于此，我们进一步探讨了贝克尔如何在第一生成原则中，从可数无限的反思跃迁至超限反思，并尝试解决在第二生成原则的超限进程中，匿名性在无限反思中的显现与最大序数悖论问题。最后通过讨论外尔对超限构造的批评和贝克尔的反驳，本文指出，超限结构的意识描述在于澄清超限理论的数学本体论结构，而非解决集合论的悖论问题。我们拒绝了希尔伯特对康托尔超限数的形式建构的数学辩护，而是从布劳威尔基于潜无限的直觉主义出发，借助于胡塞尔和贝克尔对潜无限和超限数的超越论构造，为直觉主义（有限性的可判定性构造）和形式主义（无限性的非矛盾性建构）之间关于数学对象的存在问题争议提供了现象学的解释方案。

对于第三个问题，本文在数学对象的范畴直观和超越论构造的基础上，对数学直觉主义与形式主义中直观理论进行了现象学的比较与阐释。在数学形式主义方面，希尔伯特在元数学中引入了康德的直观理论，提出了一种先于逻辑与运算的数学直观，他认为形式数学的有效性最终由元数学的“具体笔画符号的纯粹直观基础”所保证。但是这种笔画符号（stroke-symbols）的直观与笔画符号的后继序列的直观中潜藏的语义指称与潜无穷归纳难题，引发了新康德主义学派中的尼尔森、穆勒以及现象学传统中贝克尔的批评。我们通过引入当代数学哲学中帕森斯基于现象学中感性直观与范畴直观的奠基关系与想象理论的基础，提出的构型—类型（token-type）的数学直观方案尝试解决了以上问题，并构建了满足皮亚诺公理的自然数的构型—类型，获得了算术中的直观模型。而在数学直觉主义方面，本文通过内时间意识和意向充实理论，对数学直觉主义的数学对象的构造和逻辑命题的证明进行了现象学的解释。首先比较了布劳威尔的二一性（原印象—滞留）时间意识结构与胡塞尔的三一性（前摄—原印象—滞留）的内时间意识结构的相似和差异，认为布劳威尔的时间意识结构中缺乏前摄要素，进一步论述了内时间意识的直观连续统与选择序列，并据此解释了胡塞尔的基数

构造与布劳威尔的序数构造的不同进路，认为序数的构造方案要优先于基数的构造方案。我们同时比较了数学命题逻辑中，胡塞尔和布劳威尔二者对潜无限的接受以及各自对于排中律的接受和拒斥，进一步分析了贝克尔关于胡塞尔意向理论中充实、失实、既不被充实也不被失实的事态与布劳威尔的被证明为真、被证明为假、既未被证明为真也未被证明为假的命题判断之间的对应关系。布劳威尔的学生海廷在直觉主义的形式化逻辑（BHK 解释）命题中，通过贝克尔接受和发展了数学命题的意向充实理论。我们最后分析了胡塞尔的超越论逻辑对形式主义逻辑和直觉主义逻辑的兼容性：直觉主义是按照真理逻辑进行的，而形式主义则是按照后承逻辑进行的。超越论的不同的逻辑层次结构决定了数学对象的不同的构造方式，由此解释了为什么胡塞尔的立场既被归属为希尔伯特的形式主义，也被归属为布劳威尔的直觉主义。

最后，在对数学对象的超越论构造解释的基础上，我们对数学对象进行了时间性和存在论的解释。数学存在意义既不完全在直观构造中，也不完全在逻辑完备性与无矛盾性中。借助于贝克尔，本文首先从历史性方面阐述了直觉主义与形式主义之间的对立植根于亚里士多德—康德的批判数学哲学与柏拉图—莱布尼茨的数学神秘学传统。数（Zahl）与时间（Zeit）的关系表明，两种数学认识论的对立源于对生活本身的人类学理解与绝对认识的观念论之间的矛盾。数学作为此在的实际生活的存在方式，康托尔的超限进程和布劳威尔的自由选择序列不仅是纯粹意识的一种形式结构，而是此在的具体的、历史性的时间现象。数学认识的理性活动是数学家为了克服此在的历史性和死亡而无限进行的自身遗忘的演绎游戏。贝克尔认为数学对象的意识构造和人类学解释并不能完全解释形式数学与自然结构之间的和谐一致性问题，他基于柏拉图—莱布尼茨的神秘学传统，提出了“预示”现象学。符号数学与预示现象学是分别通达自然认识的两种方式，并不存在根本上的矛盾。形式主义—符号主义数学，尤其是他所主张的预示现象学，是主动的、生产性的认识。这种认识不依赖于任何给予内容，而是自由地创造具有预示作用的符号系统，然后在符号系统中筛选出能与自然现象相合的数学结构，作为物理学的概念框架。文章最后讨论了曼科对数学实存的海德格尔解释和预示现象学的批评，并运用胡塞尔的理性目的论对预示现象学的神秘性进行了认识论的解释。

综上，基于以上对三个问题的尝试性解决，我们首先分析得出了胡塞尔早期数学哲学中数的概念系统、符号系统、流形论之间的认识不对称性存在着直观构造和形式

建构的张力结构。其次在直观构造和形式建构的张力结构基础上，通过范畴直观的第二种定义论证了数学对象的范畴直观是如何可能的，提出在范畴直观的领域中，仅需依赖意义的充实，而不必假设对象的直接给予。在数学直观的基础上，通过数学对象的超越论构造对直觉主义（构造作为数学存在的保证）和形式主义（非矛盾建构作为数学存在的保证）之间的争论给出了一种解释方案。最后对数学直觉主义与数学形式主义中的认识模式进行了现象学的解释和历史分析，从而彻底地反驳了我们在引论中所重构的外尔关于现象学、形式主义、直觉主义的论点：

P1. 如果希尔伯特的形式主义（H）战胜布劳威尔的直觉主义（B），那么布劳威尔的直觉主义（B）不能为经典数学提供基础（¬BB）。

P2.布劳威尔的直觉主义（B）可以等同于现象学的直观构造理论（B≡P）

P3. 现象学的直观构造理论（P）可以为数学提供基础（PB）。

结论 C: 希尔伯特的形式主义（H）战胜了布劳威尔的直觉主义（B），因此，现象学的直观构造理论（P）不可以为数学提供基础（¬PB）。

在下一步的研究中，本文将在胡塞尔的数学现象学基础上，补充和拓展当前数学哲学中康德的数学认识论进路，最后将数学现象学中意识系统的直观构造和形式系统的定义建构的两个维度关切到当下人工智能的讨论中。

另外，从胡塞尔的第一部著作《算术哲学：一项心理学与逻辑学研究》中分析的算术化引起的数的直观和概念的起源问题，到最后一部著作《欧洲科学的危机与超越论现象学》里自然的数学化所肇始的几何对象的意义充实和积淀问题，可以看出，数学对象在意识中显现的实际历史与意义生成的意向历史之间存在着的本质联系，观念对象的先天性和历史事实本质地联系在一起。本文主要集中于数学哲学视域内数学对象的意义和充实理论的直观构造理论，并没有进一步讨论数学对象的意义和积淀的数学概念的意向历史，也没有详细阐释数学直觉主义的亚里士多德—康德的批判数学哲学传统与数学形式主义的柏拉图—莱布尼茨的数学神秘学传统。以几何学起源为例的数学概念的意向历史的分析已经表明：原初构造与意义沉淀的交织构成了数学对象的意向历史，真正的历史说明（Erklärung）问题与从认识论的澄清（Aufklärung）是相一致的。

参考文献

（一）原著类：

A. 胡塞尔德文原著

1. Husserliana

[1] Husserl, Edmund. *Hua* I. *Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge.* Ed. Stephan Strasser. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1950.

[2] Husserl, Edmund. *Hua* II. *Die Idee der Phänomenologie. Fünf Vorlesungen.* Den Haag: Martinus Nijhoff, 1950.

[3] Husserl, Edmund. *Hua* III/1. *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomen ologischen Philosophie. Erstes Buch: Allgemeine Einführung in die reine Phänomen ologie.*

[4] Husserl, Edmund. *Hua* IV. *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Zweites Buch: Phänomenologische Untersuchungen zur Konstitution.* Ed. Marly Biemel. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1952. English edition: Husserl, Edmund. 1989. *Ideas Pertaining to a Pure Phenomenology and to a Phenomenological Philosophy. Second Book: Studies in the Phenomenology of Constitution.* Trans. Richard Rojcewicz and André Schuwer. Dordrecht: Kluwer.

[5] Husserl, Edmund. *Hua* V. *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Drittes Buch: Die Phänomenologie und die Fundamente der Wissenschaften.* Ed. Marly Biemel. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1952. English edition [of 138–162]: Husserl, Edmund. 1989. *Ideas Pertaining to a Pure Phenomenology and to a Phenomenological Philosophy. Second Book: Studies in the Phenomenology of Constitution.* Trans. Richard Rojcewicz and André Schuwer, 405–430. Dordrecht: Kluwer.

[6] Husserl, Edmund. *Hua* VI. *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie. Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie.* Ed. Walter Biemel. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1954.

[7] Husserl, Edmund. *Hua* VIII. *Erste Philosophie (1923/24). Zweiter Teil: Theorie der phänomenologischen Reduktion.* Ed. Rudolf Boehm. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1959.

[8] Husserl, Edmund. *Hua* IX. *Phänomenologische Psychologie. Vorlesungen Sommersemester 1925.* Ed. Walter Biemel. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1962.

[9] Husserl, Edmund. *Hua* X. *Zur Phänomenologie des inneren Zeitbewusstseins (1893–1917).* Ed. Rudolf Boehm. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1966.

[10] Husserl, Edmund. *Hua* XIII. *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass. Erster Teil: 1905–1920.* Ed. Iso Kern. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1973.

[11] Husserl, Edmund. *Hua* XVII. *Formale und transzendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernunft.* Ed. Paul Janssen. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1974.

[12] Husserl, Edmund. *Hua* XVIII. *Logische Untersuchungen. Erster Teil: Prolegomena zur reinen Logik.* Ed. Elmar Holenstein. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1975.

[13] Husserl, Edmund. *Hua* XIX/1, XIX/2. *Logische Untersuchungen. Zweiter Teil: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis.* 2 vols. Ed. Ursula Panzer. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1984.

[14] Husserl, Edmund. *Hua* XXIV. *Einleitung in die Logik und Erkenntnistheorie. Vorlesungen 1906/07.* Ed. Ullrich Melle. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1984.

[15] Husserl, Edmund. *Hua* XXV. *Aufsätze und Vorträge (1911–1921). Mit ergänzenden Texten.* Ed. Thomas Nenon and Hans Rainer Sepp. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1987.

[16] Husserl, Edmund. *Hua* XXX. *Logik und allgemeine Wissenschaftstheorie. Vorlesungen 1917/18. Mit ergänzenden Texten aus der ersten Fassung 1910/11.* Ed. Ursula Panzer. Dordrecht: Kluwer, 1996.

[17] Husserl, Edmund. *Hua* XXXV. *Einleitung in die Philosophie. Vorlesungen 1922/23.* Ed. Berndt Goossens. Dordrecht: Kluwer, 2002.

[18] Husserl, Edmund. *Hua* XXXVI. *Transzendentaler Idealismus. Texte aus dem Nachlass (1908–1921).* Ed. Robin D. Rollinger and Rochus Sowa. Dordrecht: Kluwer, 2003.

[19] Husserl, Edmund. *Hua* XXXIX. *Die Lebenswelt. Auslegungen der vorgegebenen Welt und ihrer Konstitution. Texte aus dem Nachlass (1916–1937).* Ed. Rochus Sowa. Dordrecht: Springer, 2008.

[20] Husserl, Edmund. *Hua* XLII. *Grenzprobleme der Phänomenologie. Analysen des Unbewusstseins und der Instinkte. Metaphysik. Späte Ethik. Texte aus dem Nachlass (1908–1937).* Ed. Rochus Sowa and Thomas Vongehr. Dordrecht: Springer, 2014.

2. Materialien

[1] Husserl, Edmund. *Hua Mat* I. *Logik. Vorlesung 1896.* Ed. Elisabeth Schuhmann.Kluwer, 2001.

[2] Husserl, Edmund. *Hua Mat* III. *Allgemeine Erkenntnistheorie. Vorlesung 1902/03.* Ed. Elisabeth Schuhmann. Dordrecht: Kluwer, 2001.

[3] Husserl, Edmund. *Hua Mat* IV. *Natur und Geist.* Ed. Michael Weiler. Dordrecht: Kluwer, 2002.

[4] Husserl, Edmund. *Hua Mat* V. *Urteilstheorie. Vorlesung 1905.* Ed. Elisabeth Schuhmann. Dordrecht: Kluwer, 2002.

[5] Husserl, Edmund. *Hua Mat* VI. *Alte und neue Logik: Vorlesungen 1908/09.*Ed. Elisabeth Schuhmann. Kluwer, 2003.

3. Dokumente

[1] Husserl, Edmund. *Hua Dok* I. *Husserl-Chronik, Denk- und Lebensweg Edmund Husserls.*Ed. Karl Schuhmann. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1977

[2] Husserl, Edmund. *Hua Dok* III/3. *Briefwechsel.* Ed. Karl Schuhmann with Elisabeth Schuhmann. Vol. 3. *Die Göttinger Schule.* Dordrecht: Kluwer, 1994.

[3] Husserl, Edmund. *Hua Dok* III/4. *Briefwechsel.* Ed. Karl Schuhmann with Elisabeth Schuhmann. Vol. 4. *Die Freiburger Schüler.* Dordrecht: Kluwer, 1994. English edition [of 407–414]: Husserl, Edmund. 1981. *Husserl: Shorter Works.* Ed. Peter McCormick and Frederick A. Elliston, 360–364. Notre Dame, IN: University of Notre Dame Press.

[4] Husserl, Edmund. *Hua Dok* III/6. *Briefwechsel.* Ed. Karl Schuhmann with Elisabeth Schuhmann. Vol. 6. *Philosophenbriefe.* Dordrecht: Kluwer, 1994.

[5] Husserl, Edmund. *Hua Dok* III/7. *Briefwechsel.* Ed. Karl Schuhmann with Elisabeth Schuhmann. Vol. 7.*Wissenschaftskorrespondenz.* Dordrecht: Kluwer, 1994.

4. Rest

[1] Husserl, Edmund. *Erfahrung und Urteil: Untersuchungen zur Genealogie der Logik.* Felix Meiner Verlag, 1939.

[2] Husserl, Edmund. *Philosophie als strenge Wissenschaft.* Felix Meiner Verlag, 1965.

[3] Husserl, Edmund. Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentional-historisches Problem. *Revue Internationale de Philosophie*, vol. 1, no. 2, 1939, pp. 203-225.

[4] Husserl, Edmund. *Early Writings in the Philosophy of Logic and Mathematics.* Translated by David Willard, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[5] Husserl, Edmund.Beiträge zur Theorie der Variationsrechnung. Ph.D. Thesis, University of Vienna. French translation: *Contributions à la théorie du calcul des variations*, translated by Mlle Devouard, edited by Jacques Vauthier, *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, vol. 65, Queen's University, 1983.

[6] Hartimo, M. H. "Husserl's Scientific Context 1917-1938, a Look into Husserl's Private Library." *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*, vol. 16, 2018, pp. 317–336.

[7] Schuhmann E. and K. Schuhmann,"Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901", *Husserl Studies* 17, no. 1 (2001): 87–123.

[8] Ierna, Carlo." *Der Durchgang durch das Unmögliche. An Unpublished Manuscript from the Husserl-Archives.*" *Husserl Studies*, vol. 27, no. 3, 2011, pp. 217-226."

[9] Ierna, Carlo. "Introduction to Husserl's Lecture On the Concept of Number (WS 1889/90)." *New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*, vol. 5, 2005, pp. 276-277.

[10] Lohmar, Dieter, and Carlo Ierna. "Husserl's Manuscript A I 35." In *Husserl and Analytic Philosophy*, edited by Guillermo E. Rosado Haddock, De Gruyter, 2016, pp. 289-320.

B. 胡塞尔中译著作

[1] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《哲学作为严格科学的哲学》，倪梁康译，商务印书馆，1999。

[2] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《经验与判断—逻辑谱系学研究》，邓晓芒译，三联书店，1999。

[3] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《内时间意识现象学》，倪梁康译，商务印书馆，2010。

[4] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《纯粹现象学和现象学哲学的观念 （第一卷）：纯粹现象学通论》，李幼蒸译，中国人民大学出版社，2013。

[5] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《逻辑研究 （第一卷）：纯粹逻辑学导引》，倪梁康译，商务印书馆，2015。

[6] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《逻辑研究 （第二卷）：现象学与认识论研究（第一部分）》，倪梁康译，商务印书馆，2015。

[7] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《现象学的观念》，倪梁康译，商务印书馆，2016。

[8] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《逻辑研究 （第二卷）：现象学与认识论研究（第二部分）》，倪梁康译，商务印书馆，2015。

[9] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《欧洲科学的危机与超越论的现象学》，王炳文译，商务印书馆，2017。

[10] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《文章与书评 (1890-1910)》，高松译，商务印书馆，2018。

[11] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《逻辑学与认识论导论》，郑辟瑞译，商务印书馆，2016。

[12] 〔德〕埃德蒙德·胡塞尔：《形式逻辑和超越论逻辑》，李幼蒸译，中国人民大学出版社，2010。

C.其他原著

[1] Brouwer, L. E. J. *Collected works I*. Philosophy and Foundations of Mathematics, ed. A. Heyting. North-Holland, Amsterdam, 1975.

[2] Brouwer, L. E. J. "Intuitionism and Formalism." *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 20, no. 2, 1913, pp.81-96.

[3] Brouwer, L. E. J. "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism." *Journal of Symbolic Logic*, vol. 19, no. 2, 1954, p. 125.

[4] Brouwer, L. E. J. *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism.* Cambridge University Press, 1981.

[5] Brouwer, L. E. J. "Intuitionistische Mengenlehre." *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 28, 1919, pp. 203–208.

[6] Brouwer, L. E. J. "De onbetrouwbaarheid der logische principes." *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, vol. 2, 1908, pp. 152–158.

[7] Becker, Oskar. Mathematische Existenz: Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, edited by Edmund Husserl, vol. 8, 1927, pp. 439-809.

[8] Becker, Oscar. Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendung. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, vol. 6, edited by Edmund Husserl, Max Niemeyer Verlag, 1923.Partially translated in T. Kisiel and J. Kockelmans, *Phenomenology and Natural Science*, Northwestern University

Press, 1975.

[9] Becker, Oskar. "Briefwechsel mit Dietrich Mahnke." *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, Wilhelm Fink Verlag, 2005.

[10] Becker, Oskar. "Briefwechsel mit Dietrich Mahnke." *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, herausgegeben von Bernd Peter Aust und Jochen Sattler, Wilhelm Fink Verlag, pp. 245-358.

[11] Becker, Oskar. *Größe und Grenze der mathematischen Denkweise*. Karl Alber, 1959.

[12] Becker, Oskar. "Das Symbolische in der Mathematik." *Blätter für deutsche Philosophie, vol. 1*, 1928, pp. 329–348.

[13] Bernays, Paul. "Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen." *Mathematische Annalen, vol*. 90, 1923, pp. 159-163.

[14] Bernays, Paul. "Über Nelsons Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik." *Die Naturwissenschaften*, vol. 16, no. 9, 1928, pp. 142-145.

[15] Cantor, Georg. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Teubner, 1883.

[16] Cantor, Georg. "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre." Mathematica Annalen, vol. 46, 1897, pp. 207-246.

[17] Cavaillès, J. Sur la logique et la théorie de la science. Paris: Vrin, 1987.

[18] Descartes, René. "Rules for the Direction of the Mind. *The Philosophical Writings of Descartes*. " Translated by Cottingham, John. Cambridge University Press.

[19] Frege, Gottlob. *The Foundations of Arithmetic.* Blackwell, 1884.

[20] Gentzen, G. "The Consistency of Pure Number Theory." *Mathematische Annalen*, vol. 112, 1936, pp. 493-565.

[21] Gödel, Kurt. "Über eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes." *Dialectica*, vol. 12, no. 2, 1958, pp. 280-287.

[22] Hilbert, David. "Neubegründung der Mathematik, Erste Mitteilung." *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, vol. 1, 1922, pp. 157-177.

[23] Hilbert, David. "Die logischen Grundlagen der Mathematik." *Mathematische Annalen*, vol. 88, 1923, pp. 151-165.

[24] Hilbert, David. "Über das Unendliche." *Mathematische Annalen*, vol. 95, 1926, pp. 161-191.

[25] Hilbert, David. "Die Grundlagen der Mathematik." *Die Grundlagen der Mathematik*, 1928, pp. 1-21.

[26] Hilbert, David."Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre." *Mathematische*

Annalen, vol. 104, 1931, pp. 485-494.

[27] Hilbert, David. "Wissen und mathematisches Denken." WS 1922/23, Ausgearbeitet von W. Ackerman, Mathematisches Institut Universität Göttingen, 1988.

[28] Hilbert, David. *Grundlagen der Geometrie*. B.G. Teubner, 1899.

[29] Heyting,Arendt. *Les fondements des mathématiques.Intuitionisme, théorie de la démonstration*. Gauthier-Villars, Paris, Louvain, 1955.

[30] Heyting, Arendt. *Intuitionism: An Introduction*. North-Holland, 1956.

[31] Heyting, Arendt. Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis*, vol. 2, 1931, pp. 106-115.

[32] Heyting, Arendt. Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis*, vol. 2, 1931, pp. 106-115.

[33] Kaufmann, Felix. *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung.* Franz Deuticke, 1930.

[34] Klein, Jacob. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.* Translated by Eva Brann, The MIT Press, 1969.

[35] Mahnke, Dietrich. "Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmetaphysik." J*ahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, Bd.7, 1925, SS. 305-612.

[36] Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. "Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl. " *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002.

[37] Poincaré, Henri. "Les Mathématiques et la Logique." *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 14, 1906, pp. 25-42.

[38] Van Dalen, Dirk. *Companion to The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*. Springer, 2011.

[39] Weyl, Hermann. *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis.* Translated by Stephen Pollard and Thomas Bole, The Thomas Jefferson University Press, 1987 [1918].

[40] Weyl, Hermann. *Levels of Infinity: Selected Writings on Mathematics and Philosophy*. Edited by Peter Pesic, Dover Publications, 2012.

[41] Weyl, Hermann. "Comments on Hilbert's Second Lecture on the Foundations of Mathematics." In *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879–1930*, edited by J. van Heijenoort, Harvard University Press, 1967, pp. 480–484.

[42] Weyl, Hermann. “Erkenntnis und Besinnung.” *Studia Philosophia*, vol. 15, 1968, pp. 153–171.

[43] Weyl, Hermann. “On the Current Epistemological Situation in Mathematics.” In Mancosu, Paolo, editor. Philosophy of Mathematics: Selected Readings. Oxford University Press, 1998, pp. 86–122.

[44] Weyl, Hermann. *The Open World:Three Lectures on the Metaphysical Implications of Science.* Yale University Press, 1932.

[45] Weierstrass, Karl. *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen: Vorlesung Berlin 1878.* Springer Fachmedien Wiesbaden, 1988.

[46] Weierstrass, Karl. *Mathematische Werke von Karl Weierstrass, vol. 7: Vorlesungen über Variationsrechnung*, bearbeitet von Rudolf Rotthe, Leipzig 1927.

[47] Mittag-Leffler, G. “Sur les fondements arithmétiques de la théorie des fonctions d'après Weierstrass.” Compte rendu Congrès math. Stockholm 1909, pp. 10–31. Leipzig: Teubner, 1910.

（二）研究文献：

A.外文专著类：

[1] Centrone, Stefania. *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl.* Vol. 345 of Synthese Library, Springer, 2010.

[2] Da Silva, Jairo José. *Mathematics and Its Applications: A Transcendental-Idealist Perspective.* Springer, 2017.

[3] Grattan-Guinness, Ivor. *The Search for Mathematical Roots 1870–1940: Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel.* Princeton University Press, 2000.

[4] Hartimo, Mirja. *Husserl and Mathematics.* Cambridge University Press, 2021.

[5] Hill, Claire Ortiz, and Jairo José da Silva, editors. *The Road Not Taken: On Husserl's Philosophy of Logic and Mathematics.* College Publications, 1997.

[6] Hopkins, Burt C. *The Origin of the Logic of Symbolic Mathematics: Edmund Husserl and Jacob Klein.* Indiana University Press, 2011.

[7] Kaufmann, Felix. *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung: Eine Untersuchung über die Grundlagen der Mathematik*. Deuticke, 1930.

[8] Klein, Felix. *Development of Mathematics in the 19th Century*. Translated by M. Ackerm, Math Sci Press, 1979.

[9] Lohmar, Dieter. *Phänomenologie der Mathematik: Elemente Einer Phänomenologischen Aufklärung der Mathematischen Erkenntnis Nach Husserl.* Kluwer Academic Publishers, 1989.

[10] Mancosu, Paolo, editor. *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. *Oxford University Press, 1998.*

[11] Miller, Philip J. *Numbers in Presence and Absence: A Study of Husserl's Philosophy of Mathematics.* Martinus Nijhoff Publishers, 1982.

[12] Mohanty, J. N. *The Philosophy of Edmund Husserl: A Historical Development.* Yale University Press, 2007.

[13] Nelson, Leonard. *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik*. Meiner, 1959.

[14] Nelson, Leonard. *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik*. Meiner, 1959.

[15] Parsons, Charles. *Mathematical Thought and Its Objects.* Cambridge University Press, 2008.

[16] Peckhaus, Volker, editor. *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik.* Wilhelm Fink Verlag, 2005.

[17] Peckhaus, Volker. *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie: Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie*. Vandenhoeck & Ruprecht, 1990, Göttingen.

[18] Dominique Pradelle, *Intuition et idéalités. Phénoménologie des objets mathématiques*, Paris : Presses Universitaires de France, 2020.

[19] Rollinger, Robin D. *Husserl's Position in the School of Brentano.* Springer, 1999.

[20] Rosado Haddock, Guillermo. *Edmund Husserls Philosophie der Logik und Mathematik im Lichte der gegenwärtigen Logik und Grundlagenforschung.* Dissertation, Bonn, 1973.

[21] Schmit, Roger. *Husserls Philosophie der Mathematik: Platonistische und konstruktivistische Momente in Husserls Mathematikbegriff.* Bouvier Verlag Herbert Grundmann, 1981.

[22] Tieszen, Richard. The Intersection of Intuitionism (Brouwer) and Phenomenology (Husserl). *One Hundred Years of Intuitionism* (1907 – 2007), edited by Mark van Atten et al., Publications des Archives Henri Poincaré, 2008, pp. 78 – 95.

[23] Tieszen, Richard. *Mathematical Intuition, Phenomenology, and Mathematical Knowledge.* Kluwer, 1989.

[24] Tieszen, Richard. *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics.* Cambridge University Press, 2005.

[25] Tragesser, Robert S. *Husserl and Realism in Logic and Mathematics.* Cambridge University Press, 1984.

[26] Tugendhat, Ernst. *Der Wahrheitsbegriff bei Husserl und Heidegger*. Walter de Gruyter, 1970.

[27] Van Atten, Mark. Brouwer Meets Husserl: On the Phenomenology of Choice Sequences. Springer, 2007.

[28] Wiele, Cooper. *The Totalizing Act: Key to Husserl's Early Philosophy.* Dissertation, Boston University, 1987.

[29] Willard, Dallas. *Logic and the Objectivity of Knowledge: A Study of Husserl's Early Philosophy.* Ohio University Press, 1984.

B. 外文论文集

[1] Benacerraf, Paul, and Hilary Putnam, editors. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings.* Prentice Hall, 1964.

[2] Centrone, Stefania, editor. *Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics.* Vol. 284 of Synthese Library, Springer, 2017.

[3] Hartimo, Mirja, editor. *Phenomenology and Mathematics.* Springer, 2010.

[4] Apostolescu, Iulian, editor. *After Husserl: Phenomenological Foundations of Mathematics.* Vol. XI, No. 2 of *Research in Hermeneutics, Phenomenology, and Practical Philosophy*, Alexandru Ioan Cuza University Press, 2019.

[5] Mancosu, Paolo, editor. *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s.* Oxford University Press, 1998.

[6] Van Atten, Mark. *Essays on Gödel's Reception of Leibniz, Husserl, and Brouwer.* Springer, 2015.

[7] Van Heijenoort, Jean, editor. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1879–1931. Harvard University Press, 1967.

C. 外文连续出版物：

[1] Banega, Horacio M. R. “Husserl's Diagrams and Models of Immanent Temporality.” *Quaestiones Disputatae*, vol. 7, no. 1, 2016, pp. 47-73.

[2] Benacerraf, Paul. “What Numbers Could Not Be.” *Philosophical Review*, vol. 74, 1965, pp. 47–73.

[3] Benacerraf, Paul. “What Numbers Could Not Be.” *Philosophical Review*, vol. 74, 1965, pp. 47–73.

[4] Berghofer, Philipp. “Intuitionism in the Philosophy of Mathematics: Introducing a Phenomenological Account. ”*Philosophia Mathematica*, vol. 28, no. 2, 2020, pp. 204-235.

[5] Berghofer, Philipp. “Intuitionism in the Philosophy of Mathematics: Introducing a Phenomenological Account.” *Philosophia Mathematica*, vol. 28, no. 2, 2020, pp. 204-235.

[6] Berkeley, George. “The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician. ” Edited by David R. Wilkin1, 1734.

[7] Biermann, K. R. Did Husserl Take His Doctor's Degree Under Weierstrass Supervision? *Organon (Warszawa)*, vol. 6, 1969, pp. 261-264.

[8] Byrne, T. “Husserl’s Early Semiotics and Number Signs: Philosophy of Arithmetic through the Lens of On the Logic of Signs (Semiotic). ”*Journal of the British Society for Phenomenology*, vol. 48, no. 4, 2017, pp. 287–303.

[9] Byrne, T. “Husserl’s Early Semiotics and Number Signs: Philosophy of Arithmetic through the Lens of On the Logic of Signs (Semiotic).” *Journal of the British Society for Phenomenology*, vol. 48, no. 4, 2017, pp. 287–303.

[10] Courant, Richard. “Reminiscences from Hilbert's Göttingen.” *Math Intelligencer*, vol.3, no.4,1981, pp. 154–164.

[11] Da Silva, Jairo José. “Beyond Leibniz: Husserl’s Vindication of Symbolic Knowledge”. In *Phenomenology and Mathematics*, edited by Mirja Hartimo, Springer, 2010, pp. 123-145.

[12] Da Silva, Jairo José. “Poincaré on Mathematical Intuition: A Phenomenological Approach to Poincaré's Philosophy of Arithmetic.” *Philosophia Scientiae*, vol. 1, no. 2, 1996, pp. 87-99.

[13] Da Silva, Jairo. “Husserl and Weyl.” In *Essays on Husserl’s Logic and Philosophy of Mathematics*, edited by Stefania Centrone, Springer, 2017, pp. 317–352.

[14] Eley, Lothar. “Einleitung des Herausgebers.” In *Edmund Husserl Philosophie der Arithmetik, mit ergänzenden Texten (1890–1901)*, edited by Lothar Eley, Martinus Nijhoff, 1970, pp. XIII–XXVIX.

[15] Franchella, Miriam. Mark Van atten. “Brouwer meets Husserl: On the Phenomenology of Choice Sequences.” *Philosophia Mathematica*, vol. 16, no. 2, 2008, pp. 276-281.

[16] Fraser, C. “Edmund Husserl’s Contributions to the Theory of the Second Variation in the

Calculus of Variations.” In *Serva di Due Padroni: Saggi di Storia della Matematica in Onore di Umberto Bottazzini*, 2019, pp. 263.

[17] Fraser, C. “The Clebsch-Mayer Theory of the Second Variation in the Calculus of Variations: A Case Study in the Influence of Dynamical Analysis on Pure Mathematics.” *Research in History and Philosophy of Mathematics*, edited by M. Zack and D. Waszek, Birkhäuser, 2024.

[18] Geiger, Moritz. “Review of Becker’s Mathematische Existenz.” *Göttingische Gelehrte Anzeigen*, vol. 47, 1928, pp. 401–419

[19] Haddock, G. E. “Husserl’s Epistemology of Mathematics and the Foundation of Platonism in Mathematics.” In *Hill & Rosado Haddock*, 2000, pp. 221-239.

[20] Haddock, G. E. “Husserl’s Philosophy of Mathematics: Its Origin and Relevance.” *Husserl Studies*, vol. 22, no. 3, 2006, pp. 193-222.

[21] Haddock, G. E. “Platonism, Phenomenology, and Interderivability.” In *Phenomenology and Mathematics*, edited by Mirja Hartimo, Springer, 2010, pp. 23–46.

[22] Hartimo, Mirja. “From Geometry to Phenomenology.” *Synthese*, vol. 162, no. 2, 2008, pp. 225-233.

[23] Hartimo, Mirja. “Husserl’s Scientific Context 1917–1938, a Look into Husserl’s Private Library.” *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*, vol. 16, 2018, pp. 317–336.

[24] Hartimo, Mirja. “The Development of Mathematics and the Birth of Phenomenology.” In *Phenomenology and Mathematics*, Springer, 2010, pp. 107–121.

[25] Hartimo, Mirja.“Towards Completeness: Husserl on Theories of Manifolds 1890–1901” . *Synthese*, vol. 156, 2007, pp. 281–310.

[26] Hill, Claire Ortiz. “Abstraction and Idealization in Edmund Husserl and Georg Cantor Prior to 1895.” *Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities*, vol. 82, no. 1, 2004, pp. 217-244.

[27] Hill, Claire Ortiz. “Did Georg Cantor Influence Edmund Husserl?” *Synthese*, vol. 113, no. 1, 1997, pp. 145-170.

[28] Hill, Claire Ortiz. “Husserl on Axiomatization and Arithmetic.” *Phaenomenologica*, 2010, pp. 47–71.

[29] Hill, Claire Ortiz. “On Husserl's Mathematical Apprenticeship and Philosophy of Mathematics.” *Analecta Husserliana*, vol. 80, 2002, pp. 78-93.

[30] Hopkins, Burt C. “Claire Ortiz Hill and Jairo José da Silva. The Road Not Taken: On

Husserl's Philosophy of Logic and Mathematics.” *Philosophia Mathematica*, vol. 24, no. 2, 2016, pp. 263-275.

[31] Ierna, Carlo. “Husserl and the Infinite.” *Studia Phaenomenologica*, vol. 3, no. 1, 2003, pp. 179-192.

[32] Ierna, Carlo. “Introduction to Husserl’s Lecture on the Concept of Number”. *New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*, vol. 5, 2005, pp. 276-277.

[33] Ierna, Carlo. “The Beginnings of Husserl’s Philosophy, Part 1: From Über den Begriff der Zahl to Philosophie der Arithmetik.” *New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*, vol. 5, 2005, pp. 1-56.

[34] Ierna, Carlo. “The Beginnings of Husserl’s Philosophy, Part 2: Philosophical and Mathematical Background.” *New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*, vol. 6, no. 1, 2006, pp. 23-71.

[35] Klein, Felix. “*The Arithmetizing of Mathematics.*” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 2, no. 2, 1896, pp. 241–249.

[36] Klein, Jacob. “Phenomenology and the History of Science.” In *Philosophical Essays in Memory of Edmund Husserl*, edited by Marvin Farber and Edmund Husserl, Harvard University Press, 1940, pp. 143–163.

[37] Lohmar, Dieter. “Elements of a Phenomenological Justification of Logical Principles, Including an Appendix with Mathematical Doubts Concerning Some Proofs of Cantor on the Transfiniteness of the Set of Real Numbers.” *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, pp. 227-250.

[38] Lohmar, Dieter. “Intuition in Mathematics: On the Function of Eidetic Variation in Mathematical Proofs.” In *Phenomenology and Mathematics*, edited by Mirja Hartimo, Springer, 2010, pp. 73–90.

[39] Lohmar, Dieter. “On the Relation of Mathematical Objects to Time: Are Mathematical Objects Timeless, Overtemporal or Omnitemporal?” *Journal of Indian Council of Philosophical Research*, vol. 10, 1993, pp. 73–87.

[40] Lohmar, Dieter. “The Phenomenological Method of Eidetic Intuition and Its Clarification as Eidetic Variation.” In *Husserl: German Perspectives*, edited by John J. Drummond and Otfried Höffe, Fordham University Press, 2020, pp. 110-138.

[41] Lohmar, Dieter. “Where Was the Error of Categorial Representation: On the Meaning and Impact of Husserl's Self-Critique.” *Husserl Studies*, vol. 7, no. 3, 1990, pp. 179-197.

[42] Lohmar, Dieter. “Zur Allzeitlichkeit Mathematischer Gegenstände: Bemerkungen aus

der Sicht der Husserlschen Phänomenologie." *Philosophia Naturalis*, vol. 25, no. 1-2, 1988, pp. 186-193.

[43] Majer, Ulrich. "Husserl and Hilbert on Completeness: A Neglected Chapter in Early Twentieth-Century Foundations of Mathematics." *Synthese*, vol. 110, 1997, pp. 37–56.

[44] Majer, Ulrich. "Husserl Between Frege's Logicism and Hilbert's Formalism." *The Baltic International Yearbook of Cognition, Logic and Communication*, vol. 4, 2008, pp. 4.

[45] Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. "Geometry, Physics and Phenomenology: Four Letters of O. Becker to H. Weyl." In *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by Volker Peckhaus, Wilhelm Fink Verlag, 2005.

[46] Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. "Geometry, Physics and Phenomenology: Four Letters of O. Becker to H. Weyl." In *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by V. Peckhaus, Fink Verlag, 2005, pp. 229–243.

[47] Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. "Mathematics and Phenomenology: The Correspondence between O. Becker and H. Weyl", *Philosophia Mathematica*, Volume 10, Issue 2, June 2002, Pages 130–202.

[48] Mancosu, Paolo, and T. A. Ryckman. "Mathematics and Phenomenology: The Correspondence Between O. Becker and H. Weyl." *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, pp. 130-202.

[49] Miller, Philip. "Phänomenologie der Mathematik: Elemente Einer Phänomenologischen Aufklärung der Mathematischen Erkenntnis nach Husserl." *Review of Metaphysics*, vol. 44, no. 1, 1990, pp. 153-155.

[50] Morales, Alberto. "Aritmetización del análisis y construcción formal: Husserl como alumno de Weierstrass y Kronecker." *Revista de Filosofía*, no. 72, 2016, pp. 133-152.

[51] Müller, Aloys, and Paul Bernays. "Über den Gegenstandscharakter der Zahlen." *Annalen der Philosophie und Philosophischen Kritik*, vol. 4, no. 9, 1924, pp. 485-512.

[52] Müller, Aloys. "Über Zahlen als Zeichen." *Mathematische Annalen*, vol.90,1923, pp. 153-158.

[53] Nelson, Leonard. "Kritische Philosophie und Mathematische Axiomatik." *Beilage zu Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, vol. 34, no. 4, 1928, pp. 1-14.

[54] Parsons, C. "X*—Mathematical Intuition." *Proceedings of the Aristotelian Society*, New Series, vol. 80, 1979–80, pp. 145–168.

[55] Parsons, C."Intuition in Constructive Mathematics." In *Language, Mind, and Logic*, edited by J. Butterfield, pp. 211–229.

[56] Parsons, C.“On Some Difficulties Concerning Intuition and Intuitive Knowledge.” *Mind*, vol.102, no.406,1993, pp.233–246.

[57] Picker, B. “Die Bedeutung der Mathematik für die Philosophie Edmund Husserls.” *Philosophia Naturalis*, vol. 7, 1961, pp. 266–355.

[58] Pöeggeler, Otto. “Oskar Becker als Philosoph.” *Kantstudien*, vol. 60, no.1, 1969, pp. 298-311.

[59] Poincaré, Henri. “Les Mathématiques et la Logique.” *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 14, 1906, pp. 25-42.

[60] Pradelle, Dominique. “III. Un ciel sans éternité: la constitution des idéalités catégoriales.” *Monde, structures et objets de pensée. Recherches de phénoménologie en hommage à Jacques English*, edited by Jean-François Lavigne, Hermann, 2016, pp. 87–125.

[61] Robinson, Abraham. “The Metaphysics of the Calculus.” *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 47, 1967, pp. 28-46.

[62] Tieszen, Richard. “Free Variation and the Intuition of Geometric Essences: Some Reflections on Phenomenology and Modern Geometry.” *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 70, no. 1, 2005, pp. 153–173.

[63] Tillman, M. “Husserl’s Genetic Philosophy of Arithmetic: An Alternative Reading. ”*American Dialectic*, vol. 2, no. 2, 2012, pp. 141-190.

[64] Toader, Iulian D. “Why Did Weyl Think that Formalism's Victory Against Intuitionism Entails a Defeat of Pure Phenomenology?” *History and Philosophy of Logic*, vol. 35, no. 2, 2014, pp. 198-208.

[65] Tragesser, Robert. “Numbers in Presence and Absence: A Study of Husserl's Philosophy of Mathematics.” *Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, no. 2, 1982, pp. 646-648.

[66] Ullrich, P. “Weierstraß' Vorlesung zur ‘Einleitung in die Theorie der Analytischen Funktionen’.” *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 40, 1989, pp. 143–172.

[67] Van Atten, Mark, Dirk van Dalen, and Richard Tieszen. “Brouwer and Weyl: The Phenomenology and Mathematics of the Intuitive Continuum. ”*Philosophia Mathematica*, vol. 10, no. 2, 2002, pp. 203-226.

[68] Van Atten, Mark. “Construction and Constitution in Mathematics.” *New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*, vol. 10, 2010, pp. 43–90.

[69] Van Atten, Mark. “Intuitionistic Remarks on Husserl’s Analysis of Finite Number in the Philosophy of Arithmetic.”*Graduate Faculty Philosophy Journal*, vol. 25, no. 2, 2004, pp. 205-225.

[70] Van Atten, Mark. “On the Fulfillment of Certain Categorial Intentions.” *New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*, vol. 13, 2004, pp. 173–185.

[71] Van Atten, Mark. “Phenomenology of Mathematics.” In *Essays on Gödel’s Reception of Leibniz, Husserl, and Brouwer*, edited by Mark van Atten, Springer Verlag, 2015.

[72] Van Atten, Mark. “The Becker-Heyting Correspondence.” In *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, edited by V. Peckhaus, 2005, pp. 119–142.

[73] Van Atten, Mark. “Why Husserl Should Have Been a Strong Revisionist in Mathematics.” *Husserl Studies*, vol. 18, no. 1, 2002, pp. 1–18.

[74] Van Dalen, Dirk. “Four Letters from Edmund Husserl to Hermann Weyl.” *Husserl Studies*, vol. 1, no. 1, 1984, pp. 1-12.

[75] Viertel, Klaus. “The Development of the Concept of Uniform Convergence in Karl Weierstrass’s Lectures and Publications Between 1861 and 1886.” *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 75, no. 4, 2020, pp. 455-490.

[76] Von Neumann, J. “Zur Hilbertschen Beweistheorie.” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 26, 1927, pp. 1–46.

[77] Webb, Judson. “Paradox, Harmony, and Crisis in Phenomenology.” *Essays on Husserl’s Logic and Philosophy of Mathematics*, edited by Stefania Centrone, Springer Verlag, 2017.

[78] Willard, Dallas. “Husserl on a Logic that Failed. ”*The Philosophical Review*, vol. 89, no. 1, 1980, pp. 46–64.

[79] Zach, R. “Hilbert's Program Then and Now.” *Philosophy of Logic*, 2006, pp. 411-447.

[80] Zimny, L. “Oskar Becker-Bibliographie. ”*Kant-Studien*, vol. 60, 1969, pp. 319-330.

D. 中文译著专著：

[1] 〔美〕贝纳塞拉夫、普特南（编）：《数学哲学》，朱水林等译，北京：商务印书馆，2003。

[2] 〔法〕勒内·笛卡尔：《哲学原理》，张卜天、鲁博林译，北京：商务印书馆，2024。

[3] 〔德〕弗雷格：《算术基础——对于数这个概念的一种逻辑数学的研究》，北京：王路译，商务印书馆，2006 年。

[4] 〔德〕希尔伯特:《几何基础》，江泽涵、朱鼎勋译，北京：科学出版社，1987 年。

[5] 〔德〕海德格尔：《存在与时间》（中文修订第二版），陈嘉映、王庆节译，熊伟校，陈嘉映修订，北京：商务印书馆，2018 年。

[6] 〔德〕黑格尔：《黑格尔著作集·第 5 卷·逻辑学I》，先刚译，北京：人民出版社版，2019 年。

[7] 郝兆宽：《哥德尔纲领》，上海：复旦大学出版社，2015 年。

[8] 〔美〕卡尔·B·波耶：《微积分概念发展史》，唐生译，上海：复旦大学出版社，2007，第 5 页。

[9] 〔德〕康德：《纯粹理性批判（第 2 版）》（康德著作全集第 3 卷），李秋零译，北京：中国人民大学出版社，2004 年。

[10] 〔德〕克劳斯·黑尔德：《活的当下》，肖德生、鲍克伟译，北京：商务印书馆，2020 年 10 月。

[11] 马迎辉：《时间性与思的哲学》，江苏：江苏人民出版社，2020 年。

[12] 〔美〕莫里斯·克莱因:《数学：确定性的丧失》，李宏魁译，湖南：湖南科学技术出版社，1997 年。

[13] 〔德〕莱布尼茨：《莱布尼茨文集》第 2 卷，段德智、陈修斋译，北京：商务印书馆，2019 年。

[14] 倪梁康：《反思的使命（第一卷：胡塞尔的生平与著述；第二卷：胡塞尔与他人的交互思想史）》，北京：商务印书馆，2024 年。

[15] 倪梁康：《意识现象学教程——关于意识结构与意识发生的精神科学研究》，北京：商务印书馆，2023 年。

[16] 〔美〕斯图尔特·G·杉克尔（主编）：《20 世纪科学、逻辑和数学哲学：劳特里奇哲学史（十卷本·第九卷）》，江怡、许涤非等译，北京：中国人民大学出版社，2016 年。

[17] 奚颖瑞：《数学、逻辑与现象学》，浙江：浙江大学出版社，2018 年。

[18] 〔美〕夏皮罗：《数学哲学 ：对数学的思考》，郝兆宽， 杨睿之译，上海 ：复旦大学出版社， 2009 年。

[19] 〔希腊〕亚里士多德:《物理学》，张竹明译，北京: 商务印书馆，1982。

[20] 杨睿之、郝兆宽、汪芳庭：《集合论：对无穷概念的探索》，北京：科学出版社，2020 年。

[21] 叶峰：《二十世纪数学哲学——一个自然主义者的评述》，北京：北京大学出版社，2010 年。

[22] 张浩军：《从形式逻辑到先验逻辑：胡塞尔逻辑学思想研究》，首都师范大学出版社，2010 年。

E. 中文连续出版物：

[1] 陈志远：《胡塞尔范畴代现的理论失败之谜》，《哲学动态》2010 年第 2 期。
[2] 〔德〕迪特·洛玛尔：《胡塞尔的范畴直观概念》，张任之译，2020 年第 2 期。
[3] 〔德〕迪特里希·曼科：《从希尔伯特到胡塞尔：现象学，特别是形式数学现象学的初步导论》，于宝山译，《现代外国哲学》2023 年第 1 期。
[4] 倪梁康：《胡塞尔哲学中的“原意识”与“后反思”》，《哲学研究》1998 年第 1 期。
[5] 倪梁康：《二十世纪数学基础论争中的现象学——从胡塞尔、贝克尔与外尔的思想关联来看》，《中山大学学报（社会科学版）》，2016 年第 56 卷第 4 期。
[6] 倪梁康：《现象学的数学哲学与现象学的模态逻辑——从胡塞尔与贝克尔的思想关联来看》，《学术月刊》2017 年第 49 卷第 1 期。
[7] 倪梁康:《现象学与分析哲学的起源——关于胡塞尔与弗雷格的思想关系的回顾与再审》，《中国学术》2015 年第 34 辑。
[8] 倪梁康：《胡塞尔遗著〈经验与判断〉》，《同济大学学报：社会科学版》2018 年第 5 期。
[9] 倪梁康：《关于想象及其各个类别的意识现象学分析》，《南京大学学报（哲学·人文科学·社会科学）》2021 年第 2 期。
[10]刘晓力：《哥德尔与胡塞尔的现象学》，《自然辩证法通讯》2001 年第 1 期。
[11]郝刘祥：《外尔的哲学思想与其数学物理研究之间的关系》，《科学文化评论》2006 年第 5 期。
[12]〔德〕胡塞尔：《〈逻辑研究〉第二版“序言”草稿的两个残篇（1913 年 9 月）》，倪梁康译，《中国现象学与哲学评论》2014 年第 1 期。
[13]马迎辉：《意向性：从立义到意向流形》，《安徽大学学报（哲学社会科学版）》2015 年第 6 期。
[14]马迎辉：《何谓本质直观：界定、操作过程及其方法论效应》，《南京社会科学》2021 年第 10 期。

[15]李忠伟：《本质知识的明证机制：胡塞尔论自由想象中的本质变更》，《社会科学》2021 年第 11 期、。

[16]何浩平：《对数学对象的“理念性”意义的现象学建构分析》，《江苏社会科学》2016 年第 5 期。

[17]何浩平：《胡塞尔现象学中的数学直观及其可错性问题》，《自然辩证法研究》2016 年第 32 卷第 3 期。

[18]钱立卿：《胡塞尔“流形论”观念是如何形成的？——一个数学思想史角度的综观》，《中国现象学与哲学评论》2020 年第 1 期。

[19]钱立卿：《论希尔伯特公理化方法的哲学意义》，《哲学分析》2022 年第 13 卷第 4 期。

[20]高松：《形式化作为现代科学发现的秘密——以虚构数问题为线索》，《哲学分析》2021 年第 2 期。

[21]高松：《胡塞尔论涵义与对象的区分——以弗雷格的语义学为参照》，《中山大学学报（社会科学版）》2021 年第 61 卷第 1 期。

[22]奚颖瑞：《“形式”与数学基础问题——基于胡塞尔哥廷根数学学会报告的考察》，《安徽大学学报（哲学社会科学版）》2023 年第 2 期。

E. 博士论文：

[1] 李义民：《数的本质：弗雷格与胡塞尔之争》，华东师范大学博士论文，2016。

[2] 陶建文：《数学实在论的现象学辩护》，武汉大学博士论文，2007 年。

[3] 张　仑：《数学实在论：一个结构主义方案》，浙江大学博士论文，2022 年。

攻读博士学位期间发表的成果

(1) 于宝山：《胡塞尔和希尔伯特论完备性：相对完备性与绝对完备性的两种流形论解释》，《广西大学学报》2024 年第 6 期。

(2) 于宝山：《胡塞尔博士论题中的变分法研究及其与本质变更的关系》，《中国现象学与哲学评论》2024 年第 2 期。

(3) 迪特里希·曼科：《从希尔伯特到胡塞尔：现象学，特别是形式数学现象学的初步导论》，于宝山译，《现代外国哲学》2023 年第 1 期。

(4) 米雅-哈蒂莫：《胡塞尔的科学背景（1917—1938）：胡塞尔私人藏书室调研》，于宝山译，《中国现象学与哲学评论》2023 年第 2 期。

(5) 古尔维奇：《康德与胡塞尔论意识概念》，师庭雄、于宝山译，《德国观念论》第 3 辑。

附录一 胡塞尔私人图书馆调研：数学、物理部分

米雅·哈蒂莫

本文罗列了在胡塞尔藏书室里可以找到的，发表于 1917—1938 年期间的各门科学领域里的所有书目和文章，它们现今全部存放于鲁汶的胡塞尔档案馆里。该列表的目的是为学者们提供一份概览，以此我们可以断定胡塞尔在其生命的最后几年里依然熟知各门科学的进展。由于此列表已经相当冗长，因此我将不会对其中个别书目的意义进行深入分析，而是会根据这些书目所属的学科进行如下划分： 1. 数学 2. 物理 3. 生物和化学 4. 心理学 5. 社会学、 经济学和人类学 6. 语言学 7. 历史 8. 其他。我在此不会列举属于哲学或科学哲学的书目，主要是为了我们可以理解， 除了哲学之外，胡塞尔也熟知当时的科学进展。但是这样一条边界在很多时候是模糊的，我们应该在阅读和使用该列表时注意到这一点。此外，我还省略了一些波兰语、日语和意大利语类的书籍，因为这些书籍是胡塞尔不能进行阅读和理解的。[1]

胡塞尔档案馆对这些书籍进行了编目。编目分类采用双字母命名。第一个字母“B”代表“Buch”（书册）或“S”代表 “Sonderdruck”（单行本）；第二个字母“Q”代表“Quelle”（原始资料），“P”代表“Phänomenologie”（现象学）或“A”代表“Allgemein”（概论）。‘Q’用来标识胡塞尔本人所使用过的原始资料，其中绝大部分都包含有他自己的阅读标记。“P” 用来标记广义上重要的现象学文献，这一部分罗列出了在胡塞尔生前与他共同投身到现象学运动中的人物著作。其余的书目被归入“A”类，这里面包含有一般的科学和哲学著作。因此，我们可以通过阅读此编目分列出书籍或文章，以及它是否被胡塞尔阅读和使用过。显而易见的是，从稀疏的阅读标记到醒目的批注（如在文本旁边所加的横线、十字、感叹号等）和几乎每行都有的下划线，这些阅读标记的程度是各不一样的。我会在下面对此做些许描述。总体而言，这些阅读标记的风格是一致的，确实是胡塞尔本人的手迹。在极少的情况下，才会出现疑似是别人的手迹。（例如卡西尔的《论爱因斯坦的相对论：认识论研究》，柏林：卡西尔。 1921, BA246,也存留

[1] 我要感谢托马斯-冯格尔（Thomas Vongehr）在我研究该课题时给予的慷慨帮助。我在 2015 年鲁汶大学的胡塞尔档案馆为期两个月的研究得到了于韦斯屈莱大学人员互访计划的支持。

阅读标记，却被归到"A"类，属于一般科学类文献，并非胡塞尔的原始资料。）

应该要指出的是，由于诸多因素，这份列表中的书目并不能直接反映胡塞尔的兴趣。有些书籍已经丢失。例如布劳威尔在 1928 年所著的 《对形式主义的直觉主义反思》，该书被收录在旧的图书列表中（编号为 SA 59，没有标记），[1]但之后就已经遗失，因此并没有出现在当前的编目中。还有许多书籍的寄送可能是在胡塞尔不知情的情况下而被动接受的，例如，他或许纯粹仅仅是因为大学教授的身份而接收到这些寄送的书籍。归属到"A"类的许多书籍从未被拆封过。其中一些书籍也可能是属于胡塞尔的儿子格哈特所有，他在 1926 年到 1933 年之间在基尔大学担任法学全职教授。此外，胡塞尔显然可能在 1917 年之后就已经阅读过 1917 年之前出版的书籍。这些书籍并没有出现在列表里，但为了至少涵盖一些早期出版的有意思的书籍，它们其中的一些将会在下面提到。

尽管如此，通过胡塞尔的阅读层面，我们依然可以根据这份清单粗略地描绘出胡塞尔对科学和人文学科的总体认知。这些阅读标记可以使我们进一步知晓胡塞尔至少读过些什么。因此也使我们能够对胡塞尔所知道的 20 世纪 20 年代和 30 年代的科学领域和人文领域的实际状况形成一个 "最小" 视域。我将在下面首先罗列出某一学科类的书目，然后再分别列出具有阅读标记的书籍。在每一小节的结尾，我将提供一些总结性的评论，用以说明我们可以根据这些信息推断出什么。

我的主要目的是考察胡塞尔后期的科学背景，因此没有列出 1917 年之前出版的书籍。这一年标志着第一次世界大战的结束，在许多意义上是一个新时代的开端。胡塞尔离开了他在哥廷根的同事，刚刚将家搬到了弗莱堡。就一般科学的发展而言，这一年似乎同时也是一个转折点：希尔伯特开始为数学规划他的证明论基础，爱因斯坦新发展的广义相对论也开始主导物理学的讨论。在人文学科方面，这一年也标志着战后关于人类存在的观念化的兴起。

这份书单表明，胡塞尔至少有能力掌握我们现在可以想到的当时所有科学学科发展的总体进展：数学、物理学、生物学、心理学、社会学、人类学、经济学、历史、古典研究、艺术史、文学、语言学和教育学。在此之中，甚而还有一本属于当代性别研究的书籍。化学和天文学的书籍并没有出现在这张列表中，但是在胡塞尔的图书馆里藏有早于 1917 年之前出版的化学和天文类书籍。

[1] 感谢马克·范·阿滕（Mark van Atten）提醒我注意到这一点。

1.数学

奥斯卡·贝克尔（Becker, Oskar）.《数学中的符号》(Das Symbolische in der Mathematik). 柏林： 荣可和邓豪普特， 1928. SP 25.

奥斯卡·贝克尔（Becker, Oskar）.《关于〈数学哲学中人类学〉的尝试性研究》（Über den sogenannten ‘Anthropologismus in der Philosophie der Mathematik’）. 波恩： 科恩，1929. SP 17.

奥斯卡·贝克尔（Becker, Oskar）.《模态逻辑研究》(Zur Logik der Modalitäten). 哈勒/萨勒： 尼迈耶， 1930. SP 23.

奥斯卡·贝克尔（Becker, Oskar）.《柏拉图的观念数的二分生成》(Die diairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen). 柏林： 施普林格， 1931 年。 SP 18.

费利克斯·伯恩斯坦（Bernstein, Felix）.《文献报告。西奥多·齐恩： 逻辑与集合论的关系》(Literaturbericht. Theodor Ziehen: Das Verhältnis der Logik zur Mengenlehre). 66-68. SA 47.

吉布森·博伊斯。W. R &克莱因·奥古斯塔（Boyce Gibson, W. R. with the co-operation of Augusta Klein），《逻辑问题》(The Problem of Logic). 伦敦： 布莱克， 1921. BA 569.

威廉·伯坎普（Burkamp, Wilhelm）.《概念与关系： 逻辑基础研究》(Begriff und Beziehung: Studien zur Grundlegung der Logik). 莱比锡： 迈纳， 1927. BA 217.

芬斯勒·保罗（Finsler Paul）.《论悖论的解决》(Über die Lösung von Paradoxien). 波恩： 科恩， 1927. SP 77.

阿道夫·弗兰克（Fraenkel, Adolf）.《格奥尔格·康托尔》(Georg Cantor). 莱比锡： 图依布纳， 1930 年。德国数学家协会年鉴。 1930. 39, 9/12.第 189-266 页。 SA 193.

阿道夫·弗兰克（Fraenkel, Adolf）.《数学基础的当代问题研究》(On modern problems in the foundation of mathematics). 1933. SA 195.

弗兰克·阿道夫（Fraenkel, Adolf）.《论数学中的存在概念。关于选择公理》(ur la notion d’existence dans les mathématiques. Sur l’axiome du choix). 巴黎：高迪尔-维拉斯，1935. SA 194.

阿道夫·弗兰克（Fraenkel, Adolf）.《集合论基础十讲》(Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre). 莱比锡： 图依布纳，1927. BA 523.

莫里茨·盖格尔（Moritz, Geiger）.《奥斯卡·贝克尔的〈数学实存》(Mathematische Existenz, von Oskar Becker). 柏林： 威德曼， 1928. SP 84.

希尔伯特（Hilbert, D）.《数学基础》(Grundlagen der Mathematik). 外尔和贝尔奈斯修订。 莱比锡： 图依布纳。 1927 年 7 月应数学研讨会的邀请在汉堡发表于《数学》杂志上。 BA 761.

希尔伯特（Hilbert, D）.《排中律的证明》(Beweis des Tertium non datur). 柏林： 威德曼， 1931. SA 258.

希尔伯特（Hilbert, D）.《数学的新基础》(Neubegründung der Mathematik), 由外尔和贝尔奈斯修订。 汉堡： 数学研讨会出版社， 1922. SQ 47.

霍夫曼·保罗（Hofmann, Paul）.《排中律的问题》(Das Problem des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten). 柏林： 潘， 1931. BA 807.

奥托·赫尔德（Hofmann, Paul）.《数学方法： 数学、机械和物理学领域中的逻辑学认识论研究》(Die mathematische Methode: logisch erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik). 柏林： 施普林格， 1924. BA 787.

马丁·昂纳克（Honecker, Martin）.《对象逻辑和思维逻辑： 对逻辑新变革的建议》(Gegenstandslogik und Denklogik: Vorschlag zu einer Neugestaltung der Logik). 柏林： 杜姆勒， 1928 年。 BA 813.

马丁·昂纳克（Honecker, Martin）.《逻辑问题的分类》(eine Systematik der logischen Probleme). 柏林： 杜姆勒， 1927. BA814.

约翰逊（Johnson, W. E）. 《逻辑》(Logic). 剑桥： 剑桥大学出版社， 1922. 第二部分： 证明推理： 演绎和归纳。 BA 877

菲利克斯·考夫曼（Kaufmann, Felix）.《对逻辑与数学中基础争议的评论》(Bemerkungen zum Grundlagenstreit in Logik und Mathematik). 莱比锡：迈纳， 1931. SP 165.

菲利克斯·考夫曼（Kaufmann, Felix）.《数学中的无穷及其界限： 对于数学基础的一项研究》(Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung: eine Untersuchung über die Grundlagen der Mathematik). 德蒂克， 1930. BP 118.

莱希涅夫斯基（Lesniewski, Stanislaw）.《数学基础的新体系纲要》(Grundzüge eines

neuen Systems der Grundlagen der Mathematik). 华沙：1929. SA 379.

莱希涅夫斯基（Lesniewski, Stanislaw）.《本体论的基础研究》(Über die Grundlagen der Ontologie). 1930. 111-132. SA 378.

迪特里希·曼科（Mahnke, Dietrich).《高等分析的发现历史的新认识》(Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis). 柏林： 科学院出版社， 1926. BP 162.

卡尔·门格尔（Menger, Karl）.《曲线理论概述》(Grundzüge einer Theorie der Kurven). 柏林： 施普林格， 1925. SA 419.

阿尔伯特·诺特（Nolte, Albert）.《对集合论的评论》(Zur Kritik der Mengenlehre). 哥廷根： 迪特里希， 1927. 作为手稿印刷。 BA 1248.

帕施·莫里茨（Pasch, Moritz）.《数学与逻辑： 四篇论文》(Mathematik und Logik: vier Abhandlungen). 莱比锡： 恩格尔曼， 1919. BA 1282.

田边（Tanabe, H）.《数学哲学研究》(Studien zur Philosophie der Mathematik)，前言由西田撰写。 1925. BP 239.

田边（Tanabe, H）.《几何与经验的关系评论》(Bemerkungen über die Beziehung zwischen Erfahrung und Geometrie). 名古屋数学杂志， 14 (1918) 3-4. 297-304. SP 267.

弗里德里希·威斯曼（Waismann, Friedrich）.《数学思维导论： 现代数学概念的形成》(Einführung in das mathematische Denken: die Begriffsbildung der modernen Mathematik), 前言由卡尔·门格撰写。维也纳：格罗尔德 , 1936. BQ 494.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann）.《当代分析基础中的循环论证》(Der circulus vitiosus in der heutigen Begündung der Analysis). 莱比锡：图依布纳， 1920. SA 660.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann）.《数学认识的现状》 (Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik). 埃尔朗根： 哲学学院出版社， 1925. SQ 203.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann）.《连续系统： 对分析基础的批判性研究》(Das Kontinuum: kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis)。莱比锡： 法伊特， 1918. BA 1857.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann）.《数学哲学和自然科学》(Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft). 慕尼黑： 奥尔登堡，1926. SQ 204.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann）.《论数学的新基础》(Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik). 柏林： 施普林格， 1921. SA.661.

泰·齐亨（T· Ziehen） .《基于实证主义的逻辑学以及逻辑的历史》(Lehrbuch der Logik auf positivistischer Grundlage mit Berücksichtigung der Geschichte der Logik). 波恩：马库斯， 1920. BA 1923.

泰·齐亨（T· Ziehen）.《逻辑与集合论的关系》(Das Verhältnis der Logik zur Mengenlehre). 柏林： 鲁瑟&赖查德， 1917. BA 1927.

其中的四本书籍留存有阅读标记， 由此说明胡塞尔实际上关注了相关进展。这四本书分别是：

希尔伯特（Hilbert, D）.《数学的新基础》(Neubegründung der Mathematik), 由外尔和贝尔奈斯修订。 汉堡： 数学研讨会出版社， 1922. SQ 47.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann）..《数学认识的现状》 (Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik). 埃尔朗根： 哲学学院出版社， 1925. SQ 203.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann）.《数学哲学和自然科学》(Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft). 慕尼黑： 奥尔登堡， 1926. SQ 204

威斯曼·弗里德里希（Waismann, Friedrich）.《数学思维导论：现代数学概念的形成》 (Einführung in das mathematische Denken: die Begriffsbildung der modernen Mathematik)，前言由卡尔·门格撰写。 维也纳：格罗尔德。1936. BQ 494.

从这些书籍的阅读标记可以看出，胡塞尔对直觉主义者、形式主义者和柏拉图主义者之间关于数学基础的争论非常熟悉。希尔伯特在 1922 年发表的 《数学的新基础》是这一年早些时候在哥本哈根和汉堡所举行的讲座文集。它包含了希尔伯特关于证明理论方案的首次公开表述。胡塞尔对外尔著作的注释表明了他很熟悉相关的悖论讨论，对布劳威尔的数学进路也怀有兴趣，同时还很关心外尔如何调和布劳威尔和希尔伯特两者各自不同的立场。通过标记阅读魏斯曼的著作（1936），胡塞尔知道哥德尔在 1931 年提出的不完备性定理的结果及其对数学基础的影响。当哥德尔在 1930 年首次宣布其不完备性定理时，魏斯曼是少数在场的人之一。在五年多后出版的一本小册子中，魏斯曼讨论了哥德尔的两个不完备性定理以及在二十世纪四十年代与之相关的重要进展。事实上，胡塞尔在 1934 年已经阅读了魏斯曼在书中引用到的卡尔纳普所写的“数学中的二律背反和不完备性”一文，该论文参考了根岑（G·Gentzen） “纯粹数论的一致性”（Math. Ann. 112）， 胡塞尔同时也阅读了关于斯科伦（T· Skolem）的两篇引文：“对

有穷公理系统对数列进行完整刻画的不可能性”（Norsk. Math. Forenings Skrifter, 1933）与“基本数学问题研究”（Skrifter norske Vid.-Akad., Oslo, I. Mat.Nat. Kl. 1929）。

2.物理学

伯恩哈德（Bavink, Bernhard）.《自然科学的成果与问题：当代自 然哲学导论》(Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaften: eine Einführung in die heutige Naturphilosophie)．莱比锡： 赫泽尔， 1930. BA 106.

贝克尔（Becker, Oskar） .《直观空间的先天结构》(Die apriorische Struktur des Anschauungsraumes). 波恩： 科恩， 1930. SP 24.

贝克尔（Becker, Oskar） .《几何学的现象学基础及其在物理学中的应用》(Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen). 1923,《哲学和现象学研究年鉴》第六卷。 第 385- 560 页， BP 13-14.

贝克尔（Becker, Oskar）. 〈欧多克斯研究〉 (Eudoxos-Studie).《数学、天文学和物理学历史的起源和研究》, 1933. SP 19.

玻尔 （Bohr Niels）.《原子论和对自然的描述：四篇综述性文章》(Atomtheorie und Naturbeschreibung: vier Aufsätze mit einer einleitenden Übersicht). 柏林： 施普林格， 1931. BQ 43.

卡尔·鲍林斯基（Borinski, Karl）.《近代的世界复兴观念》(Die Weltwiedergeburtsidee in den neueren Zeiten). 慕尼黑： 巴伐利亚科学院， 1919. BA 176.

玻恩（Born, Max）.《物质的结构：关于现代原子学说和电子理论的三篇论文》(Die Aufbau der Materie: drei Aufsätze über modern Atomistik und Elektronentheorie). 柏林：施普林格， 1920. BA 177.

玻恩（Born, Max）.《爱因斯坦的引力理论和广义相对论》(Einsteins Theorie der Gravitation und der allgemeinen Relativität). 莱比锡： 赫泽尔， 1916. SA 54.

玻恩（Born, Max）.《经典热力学解释评论》(Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik). 1921. SA 53.

玻恩（Born, Max）. 《时间、空间、引力》(Raum, Zeit und Schwerkraft). SA 55.

海因里希·布赫霍尔茨（Buchholz, Heinrich）.《哲学的边界问题》(Grenzfragen der Philosophie). 慕尼黑：贝克， 1927. I. 连续性问题 (Das Problem der Kontinuität). II

绝对度量精度的不可能性及其认识论后果（Die Unmöglichkeit absoluter metrischer Präzision und die erkenntnistheoretischen Konsequenzen dieser Unmöglichkei）. BA 211-212.

威廉·伯坎普（Burkamp, Wilhelm）.《心理进程的因果性与无意识的调控行为》(Die Kausalität des psychischen Prozesses und der unbewussten Aktionsregulationen). 柏林： 施普林格， 1922. BA 218.

卡尔纳普（Carnap, Rudolf）.《空间的三维性与因果性：两个虚构世界间的逻辑关系研究》(Dreidimensionalität des Raumes und Kausalität: eine Untersuchung über den logischen Zusammenhang zweier Fiktionen). SA 78.

卡尔纳普（Carnap, Rudolf）.《论空间：对科学理论的贡献》(Der Raum: ein Beitrag zur Wissenschaftslehre). 柏林： 鲁瑟&赖查德， 1922. （康德研究丛书：56） BA 236.

卡尔纳普（Carnap, Rudolf）.《通过语言的逻辑分析克服形而上学》(Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache). 莱比锡： 迈纳， 1931. SA 79.

卡尔。H. 威尔顿（Carr, H. Wildon）.《单子论：相对性原理的哲学概述》(A theory of monads: outlines of the philosophy of the principle of relativity). 伦敦： 麦克米兰。 1922. BA 237.

卡西尔（Cassirer, Ernst）.《论爱因斯坦的相对论：认识论批判》(Zur Einstein’schen Relativitätstheorie: erkenntnistheoretische Betrachtungen). 柏林： 卡西尔， 1921. BA 245, 246. 该书有两本，胡塞尔对后一本进行了阅读和标记。

卡西尔（Cassirer, Ernst）.《现代物理学中的决定论和非决定论：历史性和系统性研究》(Determinismus und Indeterminismus in der modernen Physik: historische und systematische Studien).1937. BQ 75.

丁格雷尔·胡戈（Hugo Dingler）.《算术和逻辑的哲学》(Philosophie der Logik und Arithmetik). 慕尼黑： 莱茵哈特， 1931. BP 42.

丁格雷尔·胡戈（Hugo Dingler）.《应用几何的基础：精确科学中理论与经验关系研究》(Die Grundlagen der angewandten Geometrie: eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenshaften)。莱比锡：学术出版公司，1911. BP 37.

丁格雷尔·胡戈（Hugo Dingler）.《物理学的基础：数学自然哲学的综合原理》(Die

Grundlagen der Physik: synthetische Prinzipien der mathematischen Naturphilosophie). 柏林： 德古意特， 1919. BP 39.

丁格雷尔·胡戈（Hugo Dingler）.《物理学的基础：数学自然哲学的综合原理》(Die Grundlagen der Physik: synthetische Prinzipien der mathematischen Naturphilosophie)。柏林： 德古意特， 1919. BP 40.

丁格雷尔·胡戈（Hugo Dingler）.《现代物理学的基础问题》(Ein Grundproblem der modernen Physik). 自然哲学年鉴 14 112-134. SP 64.

丁格雷尔·胡戈（Hugo Dingler）.《亥姆霍兹与几何基础》(Helmholtz und die Grundlagen der Geometrie). 柏林： 施普林格， 1934. SP 65.

丁格雷尔·胡戈（Hugo Dingler）.《对相对论基本原理的关键评论》(Kritische Bemerkungen zu den Grundlagen《现代原子论：1933 年在斯德哥尔摩获得诺贝尔奖时的演讲》(Die modern Atomtheorie: die bei der Entgegennahme des Nobelpreises 1933 in Stockholm gehaltenen Vorträge). 海森堡、薛定谔、狄拉克著。 莱比锡： 赫策尔， 1934. BQ 12.

杜比斯拉夫，沃尔特（Dubislav, Walter).《数学哲学与自然科学研究》(Zur Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft). 莱比锡： 迈纳， 1929. SA 138.

爱丁顿（Eddington, A. S.）.《物理学的世界观及其哲学解释： 物理世界的本质》(Das Weltbild der Physik und ein versuch seiner philosophischen Deutung ;The nature of the physical world). 朗史外格： 韦氏， 1931. BA 419.

爱因斯坦（Einstein, A）.《关于狭义与广义相对论的一般性解释》(Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Gemeinverständlich). 朗史外格： 韦氏， 1919. BQ 120.

爱因斯坦（Einstein, A）&埃尔温·弗罗因德里希（Freundlich, Erwin）.《爱因斯坦的引力理论基础》(Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie von Erwin Freundlich)，由爱因斯坦撰写前言。 柏林： 施普林格， 1917. BA 531.

阿尔弗雷德·埃尔斯巴赫（Elsbach, Alfred C）.《康德与爱因斯坦：现代认识论与相对论的关系研究》(Kant und Einstein: Untersuchungen über das Verhältnis der modernen Erkenntnistheorie zur Relativitätstheorie)，柏林： 德古意特， 1924. BA 434.

埃尔温·弗罗因德里希（Freundlich, Erwin）.《爱因斯坦的万有引力：相对于经典

力学假设的广义相对论立场》(Die Einsteinsche Gravitationstheorie: die Stellung der allgemeinen Relativitätstheorie Zu den Hypothesen der klassischen Mechanik). 莱比锡： 波舍尔， 1917. SQ 39.

卡旺斯基（Gawronsky, D.）.《从哲学的观点看爱因斯坦的相对论》(Die Relativitätstheorie Einsteins im Lichte der Philosophie). 伯尼尔： 霍普， 1924. BA 550.

莫里茨·盖格尔（Geiger, Moritz）.《相对论的哲学意义》(Die philosophische Bedeutung der Relativitätstheorie). 哈雷/萨勒： 尼迈耶。 1921. BP 55.

盖伦（Geilen, V.）.《作为西方文化基础的数学和建筑》(Mathematik und Baukunst als Grundlagen abendländischer Kultur). 1921. BA 554.

库尔特（Geissler, FR. J. Kurt）.《对形式相对主义的普遍反驳（爱因斯坦和他的朋友们）和对基础科学的相对性的一致性阐释》(Gemeinverständliche Widerlegung des formalen Relativismus (von Einstein und verwandten) und zusammenhängende Darstellung einer grundwissenschaftlichen Relativität)。莱比锡： 希尔曼， 1921. BA 558.

盖拉赫；沃尔特；哈特曼（Gerlach, Walter and M. Hartmann）.《自然科学的认识论及其方法》(Naturwissenschaftliche Erkenntnis und ihre Methoden). 柏林： 施普林格， 1937. BA 694.

哈斯，亚瑟（Haas, Arthur）.《新物理学的自然观》(Naturbild der neuen Physik). 柏林： 德古意特， 1932. BA 652.

海林（Haering, Theodor L）.《自然科学的哲学：尝试对（无机界）自然科学的方法和成果形成统一性理解；同时恢复前科学的世界观》(Philosophie der Naturwissenschaften:Versuch eines einheitlichen Verständnisses der Methoden und Ergebnisse der (anorganischen) Naturwissenschaft. Zugleich eine Rehabilitierung des vorwissenschaflichen Weltbildes). 慕尼黑： 罗斯尔， 1923. BA 658.

霍尔丹（Haldane, Viscount）.《相对论的盛行》(The reign of relativity). 伦敦：默里， 1921. BA 662.

乔治·哈梅尔（Hamel, Georg）.《力学 I：力学的基本术语》(Mechanik I: Grundbegriffe der Mechanik). 莱比锡：托伊布纳， 1921. BA 666.

赫费（Heffter, L）.《论爱因斯坦的相对论》(Über Einsteins Relativitätstheorie). 萨尔布鲁克： 普法尔茨—萨尔布鲁克地区德国工程师协会，1920. PP. 73-75. SA 246.

维尔纳·海森堡（Heisenberg, Werner）.《自然科学基础的变更》(Wandlungen in den

Grundlagen der Naturwissenschaft). 斯图加特： 赫泽尔。 1936. BQ 177.

汉斯·以塞勒（Israel, Hans）.《一百位反对爱因斯坦的作者》(100 Autoren gegen Einstein)。由以塞勒、汉斯、埃里希·拉克哈伯、鲁道夫·魏曼编著。 莱比锡：福伊特兰德， 1931. BA 66 bis.

威廉·耶格尔（Jaeger, Wilhelm.）《时间、空间、物质、以太、力、质量、相对论：对作为现代世界图景根基的物理学问题的批判性思考》(Zeit, Raum, Stoff, Äther, Kraft, Masse, Relativitätstheorie: eine kritische Betrachtung zu diesen Fragen der Physik, als wichtigen Grundfragen des modernen Weltbildes überhaupt). 阿多夫· 沃格特尔。 1925. BA 841.

詹姆斯·金斯（Jeans, James）.《恒星、世界和原子〈参考系的原则可确定性》(Über die prinzipielle Bestimmbarkeit der berechtigten Bezugssysteme beliebter Relativitätstheorien)。巴尔特， 1915. SA 338.

兰兹·亨利（Lanz, Henry）.《引力的逻辑》(Logic of gravitation). 1928. 科学月刊，27: 530-535. SA 369.

迪特里希·马恩克（Mahnke, Dietrich）.《西方科学没落了吗？》(Untergang der abendländischen Wissenschaft) . 莱比锡： 沃格尔。 1927. SP 217.

梅林（Mellin, Hj）《以太和以太张力》(Der Aether und die Aetherspannung). 赫尔辛基：学术书局， 1929. SA 412.

梅林（Mellin, Hj）.《基于赖欣巴哈的 "相对论的时空学说公理 "对爱因斯坦理论的批判》（Kritik der Einsteinschen Theorie an der Hand von Reichenbachs ‘Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre’）. 芬兰科学年鉴 26. 赫尔辛基， 1926. SQ 99.

梅林（Mellin, Hj）.《以太张力下的世界构建》(Das Welgebäude im Lichte der Ätherspannung). 赫尔辛基： 芬兰科学院， 1929. SA 415.

梅林（Mellin, Hj）.《相对论中的矛盾》(Die Widersprüche in der Relativitätstheorie). 赫尔辛基：萨那， 1933. SA 416.

梅林（Mellin, Hj）.《时间与空间的问题》(Das Zeit-Raum-Problem). 赫尔辛基： 芬兰科学院， 1931. SA 417.

梅林（Mellin, Hj）.《时空问题与万有引力定律》(Das Zeit-Raum-Problem und das Gravitationsgesetz). 赫尔辛基： 学术书局， 1928. SA 418.

梅林（Mellin, Hj）.《最高和最普遍的自然法则》(Das allgemeinste und oberste Naturgesetz). 赫尔辛基： 萨那， 1933. SA 414.

古斯塔夫（Mie, Gustav）.《物质问题》(Das Zeit-Raum-Problem), 巴登的弗莱堡，斯派尔和凯尔纳， 1925. BA 1183.

阿尔夫·尼曼（Nyman, Alf）.《爱因斯坦-伯格森-费英格：一项尝试性评论》(Einstein-Bergson-Vaihinger: ein Abwägungsversuch). 莱比锡： 迈纳， 1927. SA 455.

保罗·奥本海姆（Oppenheim, Paul）.《形成科学概念的静态和动态的基本规律》(Die Denkfläche: statische und dynamische Grundgesetze der wissenschaftlichen Begriffsbildung)。柏林：潘-出版社， 1928. BA 1262.

保罗·奥本海姆（Oppenheim, Paul）.《科学的自然秩序：比较科学的基本规律》(Die natürliche Ordnung der Wissenschaften: Grundgesetze der vergleichenden Wissenschaftslehre). 耶拿：费舍尔， 1926. BA 1263.

法伦·阿道夫（Phalén, Adolf）.《相对论的时空测量研究》(Über die Relativität der Raum- und Zeitbestimmungen). 1922. BP 202.

马克斯·普朗克（Planck, Max).《物理认识的新路径》(Neue Bahnen der physikalischen Erkenntnis) 。莱比锡： 巴特， 1916. BA 1330.

石里克（Moritz Schlick）.《当代物理学的空间与时间：相对论和万有引力导论》(Zur Einführung in das Verständnis der Relativitäts- und Gravitationstheorie). 柏林：施普林格， 1919. BA 1503/b.

石里克（Moritz Schlick）.《空间、时间与相对论原理》(Raum, Zeit und Relativitätsprinzip) 。图依布纳， 1924. BA 1530. BA 1530.

诺采·施伦克诺（Schrenck-Notzing, A. von）. 《关于介质强度的物理现象： 一种辩护》(Die physikalischen Phänomene der grossen Medien: eine Abwehr). 斯图加特： 德意志联合出版社， 1926. BA 1308.

塞利恩·埃瓦尔德（Sellien, Ewald）.《相对论的认识论意义》(Die erkenntnistheoretische Bedeutung der Relativitätstheorie). 柏林： 鲁瑟和理查德， 1919. BA 1563.

斯卢茨基· 欧根（Slutsky, Eugen）.《作为循环流程来源的随机原因总和》(The summation of random causes as the source of cyclic processes). 莫斯科： 联合研究所， 1927. SA 540.

斯卢茨基·欧根（Slutsky, Eugen）.《随机渐近线与极限研究》(Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte) . 1925. BA 1600.

沃克（Tomb, J. Walker）. 〈一篇关于形而上学与教学时间（包括相对论中的时间）的论文〉 (An essay on metaphysical and mathematical time including time in the theory of relativity). 伦敦： 贝尔和丹尼尔森， 1930. BA 1735.

乌尔巴赫·本诺（Urbach, Benno）.《通过克劳斯教授对爱因斯坦的相对论哲学争论进行批判性的评论》(Kritische Bemerkungen zur philosophischen Bekämpfung der Einsteinschen Relativitätstheorie durch Prof. Dr. O. Kraus). 霍普弗， 1922. SA 605.

鲁道夫·威廉姆（Weinmann, Rudolf）.《反对爱因斯坦》(Anti-Einstein). 莱比锡： 希尔曼， 1923. BA 1836.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann）.《空间、时间、物质：广义相对论导论》(Raum - Zeit - Materie: Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie). 柏林： 施普林格， 1919. BA 1858.

赫尔曼·外尔 Weyl, Hermann）.《物理学中的统计方法与因果性的关系》(Das Verhältnis der kausalen zur statistischen Betrachtungsweise in der Physik). 巴塞尔： 施瓦本， 1920. SA 662.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann).〈什么是物质？ 两篇关于自然哲学的论文”〉 (Was ist Materie? Zwei Aufsätze zur Naturphilosophie) 。柏林： 施普林格， 1924.BQ 499.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann）.《数学哲学和自然科学》(Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft) 慕尼黑： 奥尔登堡。 1926. SQ 204.

怀特海（Whitehead, Alfred North）.《相对论在物理科学中的应用》(The principle of relativity with applications to physical science)。剑桥出版社， 1922. BA 1862.

曾德尔（L.Zehnder）.《原子的结构》(Der Aufbau der Atome aus Uratomen). 图宾根：劳普， 1922. BA 1911.

曾德尔（L.Zehnder）.《物理世界图景的变革。附马克斯-普朗克的后记》(Umsturz im Weltbild der Physik. Mit einem Nachw. von Max Planck). 慕尼黑： 克诺尔和赫斯出版社， 1934. BA 1928.

在藏书室里收藏的 1917 年至 1938 年期间出版的众多物理学书籍中，胡塞尔对以下书目做了阅读标记：

玻尔（Bohr Niels）.《原子论和对自然的描述：四篇综述性文章》(Atomtheorie und Naturbeschreibung: vier Aufsätze mit einer einleitenden Übersicht). 柏林：施普林格，1931. BQ 43.

卡西尔（Cassirer, Ernst）.《现代物理学中的决定论和非决定论：历史性和系统性研究》(Determinismus und Indeterminismus in der modernen Physik: historische und systematische Studien). 1937. BQ 75.

狄拉克（Dirac, P. A. M）. 〈现代原子论：1933 年在斯德哥尔摩获得诺贝尔奖时的演讲〉（Die modern Atomtheorie: die bei der Entgegennahme des Nobelpreises 1933 in Stockholm gehaltenen Vorträge)海森堡、薛定谔、狄拉克。莱比锡：赫策尔，1934. BQ12.

爱因斯坦（Einstein, A）.《关于狭义与广义相对论的一般性解释》(Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Gemeinverständlich), 朗史外格：韦氏， 1919. BQ 120.

海森堡·维尔纳（Heisenberg, Werner）.《自然科学基础的变更》(Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft). 斯图加特： 赫泽尔。 1936. BQ 177.

詹森·保罗（Jensen, Paul） . 〈生命 >（Leben）耶拿：费舍尔， 1931. 《自然科学简明词典》（Handworterbuch der Naturwissenschaften）， 1931. SQ 55.

沃尔夫冈·科勒（Köhler, Wolfgang）.《在静止和稳定状态中的物理格式塔：一项自然哲学研究》(Die physischen Gestalten in Ruhe und im stationären Zustand: eine naturphilosophische Untersuchung). 埃尔兰根： 哲学学院出版社， 1924.

梅林（Mellin, Hj）.《基于赖欣巴哈的 "相对论的时空学说公理 "对爱因斯坦理论的批判》（Kritik der Einsteinschen Theorie an der Hand von Reichenbachs ‘Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre’）. 芬兰科学年鉴 26. 赫尔辛基， 1926. SQ 99.

(Weyl, Hermann）. 〈什么是物质？关于自然哲学的两篇论文〉 (Was ist Materie? Zwei Aufsätze zur Naturphilosophie) . 柏林： 施普林格， 1924.BQ 499.

赫尔曼·外尔（Weyl, Hermann）.《数学哲学和自然科学》(Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft). 慕尼黑： 奥尔登堡， 1926. SQ 204.

在胡塞尔的藏书室里收藏的 1917 年到 1938 年期间出版的关于物理学的书籍以及他本人阅读标记的部分，在数目上要比数学类的书籍多出许多。同数学书目类的阅读一样，胡塞尔标记的书籍或文章，一般都是一位著名的科学家向更多的普通读者解释

其理论的发展。胡塞尔阅读了玻尔、卡西尔、爱因斯坦、弗罗伊德利希、海森堡和外尔的物理学书籍。总的来说，胡塞尔的阅读标记显露了他想要理解广义和狭义相对论以及量子物理学的努力。

胡塞尔并没有对由相对论所引发争议的书籍过分关心，也无意参与诸多反对它的企图。 假设胡塞尔的阅读标记所按照的是书籍出版的时间顺序，那么他的阅读进程应该如下：胡塞尔似乎很早就熟悉广义相对论，主要是通过阅读埃尔温·弗罗因德里希（Freundlich, Erwin, 1917）的《爱因斯坦的万有引力：相对于经典力学假设的广义相对论立场》以及爱因斯坦（Einstein,　A1919）《关于狭义与广义相对论的一般性解释》。尤其是从前者的详细标记来看，这本书似乎被很认真地阅读过。我们据此可以断定，胡塞尔可能早在二十世纪 20 年代之前知道狭义相对论和广义相对论的基本原理。 在二十世纪 20 年代中期 ，胡塞尔主要受到赫尔曼·外尔（Hermann Weyl） 所著《数学哲学和自然科学》（慕尼黑：奥尔登堡， 1926）一书的影响，而外尔的《时间、空间、物质》一书则没有什么阅读标记，另一本《什么是物质》则有少量标记。另外，胡塞尔只在玻尔 1931 年的《原子论和对自然的描述：四篇综述性文章》的第 62 页做了一处标记；在狄拉克（1934）的文章中，他只在关于海森堡题为“量子力学的发展"那里作了些许标记，而对海森堡的《自然科学基础的变更》则从头至尾进行了阅读标记，同样对卡西尔（1937）《现代物理学中的决定论和非决定论：历史性和系统性研究》一书也从开始到结尾做了阅读标记，但并不是很多。在其中关于保罗·詹森和哈尔玛·梅林（Paul Jensen and Hjalmar Mellin）的书籍是很少见的。胡塞尔对 Jensen 书中所引波尔的文章《物理理论的意义研究》进行了旁批，而对哈尔玛·梅林书的第三部分，也就是标题为“绝对的同时性”的最后一部分显示了极大的兴趣，梅林在其中讨论了时间以及时间意识。

附录二 胡塞尔博士论文：变分法论稿

埃德蒙德·胡塞尔*

1. 胡塞尔博士论文引言

1.1 胡塞尔与魏尔斯特拉斯

胡塞尔完成中学学业后，于 1876 年 6 月 30 日在波希米亚奥洛穆茨通过了毕业考试。1877-1878 年期间在莱比锡求学一年半之后，他于 1878 年夏季转赴柏林继续深造。现存于鲁汶档案馆的胡塞尔手写速记笔记证实，胡塞尔在柏林期间系统地旁听了数学家魏尔斯特拉斯的一系列学期课程：

(1) 1878-1879 学年：《椭圆函数理论导论》

(2) 1879 年夏季学期：《变分法》

(3) 1880-1881 学年：《分析函数论》

这些珍贵的课堂记录后被胡塞尔亲自提交给《魏尔斯特拉斯全集》（Opera omnia）编委会，确证他是这位数学大师的正式门生。值得注意的是：

1881 年的夏天到 1882 年 5 月之间，胡塞尔以助教身份参加了维也纳大学莱奥·柯尼希伯格（Leo Koenigsberger，魏尔斯特拉斯另一高足）主持的研讨班。作为奥匈帝国的公民，他于 1882 年秋返回维也纳筹备博士答辩，在当年 10 月 2 日由布迪格尔（Budiger）院长主持的答辩委员会中，柯尼希希伯格与韦伊（Weyr）分别担任第一、第二评审专家。胡塞尔顺利通过了 11 月 29 日的答辩，魏尔斯特拉斯随即邀请他担任 1883 年夏季学期柏林大学的助教。然而胡塞尔选择重返维也纳追随布伦塔诺研习哲学，这为其后基于“数的概念”的研究（1886-1887）的教授资格论文奠定了基础。这里值得强调的是：主持其教职资格考核的考官正是集合论的创立者格奥尔格·康托尔（Georg Cantor）——这位数学巨匠同样出自于魏尔斯特拉斯的门下！

* 本文译自 E. Husserl. Contributions a la theorie du calcul des variations. Edited by J. Vauthier, Queen's University. 1983. 由于法译版中相关的数学公式多有错漏和不一致之处，因此译者就相关部分依据了胡塞尔未发表的博士论文的德文手写稿：E. Husserl. Beiträge zur Theorie der Variationsrechnung. Unpublished doctoral dissertation, University of Vienna, 1882.（目前收藏于维也纳大学图书馆，其中第 43-44 页缺失）。这里呈现的译稿首先由上海社科院的钱立卿老师进行了全面的校正，指出了译者在翻译和公式排版中的诸多错误，中山大学的漆阳博士对译文中的数学公式作了进一步的排版和检查。译稿将刊载于《中国现象学与哲学评论》第 36 辑。

1.2 胡塞尔博士论文概要

在阅读胡塞尔博士论文时最为明显的一点是：胡塞尔通过对问题的深入研究，亲自给出了该理论诸多结果的证明。他在数学领域做了大量细致的理论整理工作。关于具体的历史背景，我们已在前文的介绍中有所说明，以便读者更好地理解下面的具体发展内容。以下编号为原论文中的页码：

I.对一般变分法中最简单问题的评论

1 至 10 页：利用拉格朗日方法（参考《解析函数论》第 205 页，1797 年 5 月），对二阶变分进行变换。这里提出了拉格朗日的第一个定理（表述如下）：在满足方程 $M - N^2/4P = 0$ 存在有界解的条件下，条件 $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0$ 是充分必要条件。

11 至 12 页：举例说明第二变分为零的情形。事实上，如果函数 N/2P 在区间 $[x_0,x_1]$ 上连续，则无法选取满足方程 $z'+(N/2P)z=0$ 的解ω、使得 $\omega(x_0)$ 或 $\omega(x_1)$ 为零，除非ω恒等于零。

12 至 14 页：胡塞尔重新推导了雅可比（Jacobi）变换及其相应方程，但他也指出了传统推导中的一个循环论证问题，即 N/2P 在表达式 (3) 中依赖于υ，而表达式 (11) 中的υ又依赖于第 12 页定义的函数π。

15 至 18 页：使用微小扰动法得到雅可比基本定理及其方程的解。胡塞尔给出的证明比克莱布什（Clebsch）和迈耶尔（Mayer）的方法更为简单（现今已知，通过简单的微分也可得出此结果）。

19 至 21 页：讨论共轭点的重要性，并总结雅可比的相关结果：一旦超过某个共轭点，就不再存在极值。

II. 从克莱布什和雅可比的二阶变分的变换中推导判据

22 至 25 页：一般情况下利用拉格朗日乘子法表示二阶变分。

26 至 28 页：介绍克莱布什的线性变换方法（《克雷尔杂志》第 55 卷，1858 年，第 335-355 页），将对二阶变分的符号（正负判定）研究简化为研究某个子空间上的二次型的问题。

28 至 42 页：研究克莱布什行列式的零点与共轭点之间的关系。这里所采取的方法与迈耶尔的研究（《Crelle 杂志》第 69 卷，1868 年，第 250 页）有所不同，并且更

具一般性。[1]

III. 极值存在的边界条件

45 至 66 页：胡塞尔利用魏尔斯特拉斯方法研究了在区间 $[x_0,x_1]$ 上只有一个共轭点的情况。此方法与埃德曼（Erdmann）在 1878 年发表的论文（《数学与物理杂志》（Zeitschrift für Mathematik und Physik），第 23 卷，第 367 页）中发展的方法不同。这部分毫无疑问是胡塞尔论文中 最精彩的部分，尤其体现在使用朗斯基行列式（Wronskien）来处理 W_h 为零的情形。

值得注意的是，当时魏尔斯特拉斯学派尚未明确界定函数的正则性问题：函数 f 通常被默认为实解析函数（参阅论文第 16 页对级数展开的论述）。对正则性的唯一论述见于论文第 53 页——胡塞尔在此断言"f 具有可微性，因其始终处于连续变化状态。"康托尔通过引入魏尔斯特拉斯构造的不可导得连续函数范例，使得连续性及连续统问题进一步凸显。由此，亚里士多德式的连续性问题再次浮现，更为重要的是：这一数学基础层面的争论，恰恰构成了哲学家胡塞尔后续现象学探索的重要思想坐标。

2. 胡塞尔的博士论文

2.1 对一般变分法中最简单问题的评论

在《克雷尔杂志》[2]的第 17 卷中重现了一封雅可比（Jacobi）写给舒马赫（Schumacher）的书信，[3]其内容被公认为是雅可比这位大师最为独特和天才的工作之一，因为它解决了一个长期以来悬而未决的问题。对于这个问题，即便是在其最特殊的形式下，勒让德（Legendre）和拉格朗日（Lagrange）这样伟大的数学家的努力也都失败了，而现在问题似乎突然之间得到了完美地解决。这个问题与以下运算相关：

"在所有关于自变量 x 的函数 y 中，找出使以下积分

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

达到极大值或极小值的函数。"

[1] 胡塞尔博士论文中的第 43-44 页是缺失的。

[2] 《纯粹与应用数学期刊》(Journal für die reine und angewandte Mathematik) 由奥古斯特·利奥波德·克雷尔（August Leopold Crelle ）于 1826 年创办。利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）和卡尔·魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass）在 1881 年至 1888 年期间担任编辑——中译者注。

[3] 实际上这里提到的是雅可比的一篇"文章摘录"，并非是写给舒马赫，而是写给恩克（Enke）教授的书信。发表在 Journal de Crelle 17. 1882. p. 68 . 显然，这部分摘录就是在此处所讨论的内容。

欧拉和拉格朗日的变分法理论指出，函数 y 只有通过一个易于建立的二阶微分方程与 x 相关联，才能提供一个解。正是通过对所提出积分的“一阶变分”的观察得出了这个结论。

但是接下来需要回答一个极为困难的问题：即对于如此定义并根据两种情况中规定的限制条件唯一确定的函数，积分是否是取得极大值、极小值，还是两者都不是。这导致了对所讨论积分的“二阶变分”符号的研究。正是勒让德首次提出了将二阶变分转换为一种形式，这种形式可以立即判定其符号。他处理了最简单的问题，即具有这种特点的函数，其中在积分符号下包含的仅是未知函数 y 的一阶导数。对于这个问题，在认识到了进行变换的可能性后，他过早地得出了一个不充分的判据。

拉格朗日更深入地研究指出，这种变换只有在转换后的表达式中没有任何项变成无穷大时才能保持有效。然而，要判断这一点，就有必要真正地实施这种变换。虽然拉格朗日走上了正确的道路，但他并没有达到他所追求的目标。即使对最简单的问题实施这种变换，也需要对某个一阶非线性微分方程进行 积分。拉格朗日尝试为解决这个方程的所有努力均以失败告终。

在更一般的问题中，当变换需要求解整个微分方程组时，情况变得更复杂了。在上述提及的雅可比的结果中（在手稿中被缩写为“上述”）包含了最完整的判据——对于一般问题既必要又充分的判据——这一点尤其令人钦佩。然而，雅可比并没有完整公布他的研究过程，正是这些过程导致了他的重要发现。因此，后继的数学家们不得不克服这一难题，那就是真正地执行变换操作，根据这位大师留下的零星线索真正实现变换，并借助这些线索验证所得结果。只有通过赫塞（Hesse）、克莱布什（Clebsch）和 迈耶尔（A. Mayer）的关键工作，二阶变分理论，无论是关于雅可比处理的问题，还是更一般的变分学问题，才能够最终完全确立。

雅可比发现的真正成就在于这样一个显著的事实：当问题所对应的微分方程（也就是说，只有它的积分本身能够解决所提出的问题）被积分时，变换所涉及的微分方程会自动被积分。只有该证明才表明这种变换真正可以用于最一般的问题，并且是沿着拉格朗日已经准确铺设的路径进行的。

鉴于这些近乎奇迹般突然出现的重要发现，试图重构雅可比的原始思路也许并非无趣。毫无疑问，雅可比专注于当时唯一可以被彻底处理的最简单问题，并最终将其解决。在这里将获得的原理推广到更一般情况是显而易见的，无论相应的计算复杂到

何种程度——即使这些计算不再需要进行超越性的操作。事实上，存在一条极其简单且自然的途径，可以顺利地从拉格朗日停止的确切点推进到雅可比的结果。阐述这一点正是下面评论的目的。

我们首先需要简要介绍拉格朗日的方法（《分析函数理论》，第 XII 章）。如果我们设定积分为：

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

那么二阶变分的表达式为：

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} 2\Omega_2\, dx$$

其中符号

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z \frac{dz}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \quad , \quad z = \delta y \tag{1}$$

且 $z = \delta y$ 已被引入。我们现在将 Ω_2 分解为两部分：

$$\Omega_2 = (I) + (II)$$

其中第一部分必须保持一个恒定的符号，而第二部分必须代表一个精确的导数。如果暂时令 M, N, P 表示未知函数，可以写作：

$$\begin{aligned} I &= z^2 M + z \frac{dz}{dx} N + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 P \ldots \\ II &= z^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - M\right) + z \frac{dz}{dx} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - N\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} - P\right) \end{aligned} \tag{2}$$

将第（II） $\frac{d}{dx}(\mu + z^2 v) = \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} v + z^2 \frac{dv}{dx}$ 部分与之等同，其中 μ,υ表未知函数，通过比较关于 z 的各项系数可以得出：

$$\frac{dy}{dx}=0,\quad \text{即}\,\mu=\text{常数}$$

$$M=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{dv}{dx}$$

$$N=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}-2v$$

$$P=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

因此 ，

(3)

将这些表达式代入公式 (2) 中，可得：

$$\Omega_2=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{dv}{dx}\right)z^2+z\frac{dz}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}-2v\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}+\frac{d}{dx}(\mu+vz^2)$$

$\equiv$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx}+z\frac{N}{2P}\right)^2+z^2\left(M-\frac{N^2}{4P}\right)+\frac{d}{dx}\left(\mu+z^2v\right)$$

(4)

为了使讨论清晰，上述表达式（3）中的符号 M、N、P 被保留。如果部分 (I) 现在必须保持一个恒定的符号，例如对任意变分 z 都保持正值，那么必要且充分的条件为：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}>0 \qquad\qquad M-\frac{N^2}{4P}\geq 0 \tag{5}$$

这些条件必须对区间内的所有 x 值都满足。第一个条件是由勒让德给出的条件。对于 $\delta^2 I$ 始终具有恒定符号的情况，这些条件同样是必要且充分的，这一点将很容易证明。

只有第二个条件包含了υ，当我们把它写成完整形式时，其形式如下[1]：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{dv}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}-2v\right)^2\frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}\geq 0$$

[1] 在胡塞尔手稿中，明显的错误是：$=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|-2\frac{dv}{dx}\cdots\geq 0$。

如果我们现在通过微分方程 M−N2/4P =0 或

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{dv}{dx}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}-2v\right)^2=0$$

(6) [1]

来定义这个函数（这是允许的）。那么二阶变分的表达式[2]为：

$$\delta^2 I=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx}+z\frac{N}{2P}\right)^2+2z^2\left(M-\frac{N^2}{4P}\right)\right\}dx+\left[z^2 v\right]_{x_0}^{x_1}$$

(7)

该公式可以被化简为更简单的形式：

$$\delta^2 I=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx}+z\frac{N}{2P}\right)^2 dx+\left[z^2 v\right]_{x_0}^{x_1}$$

(8)

基于此，我们能够推导出以下定理：

只要有可能对微分方程（6）进行积分，使得其积分在区间 x_0 和 x_1 之间不变为无穷大，那么条件 $\partial^2 f/\partial y'^2 > 0$ 对于极小值的存在既是必要的也是充分的。

因为考虑到 z 的变化，极限值将以相同的方式消失，并且转换后的表达式的任何部分都不会变为无穷大。

为了充分利用我们发现的定理，现在有必要对微分方程（6）进行积分。正是在这里，拉格朗日停止了他的研究。

表达式（8）不仅不能变为无穷大，而且也不能变为零。因为变为零，仅凭二阶变分的观察就不足以得出判定标准，而且我们很容易看到，在大多数情况下，既不会出现极大值，也不会出现极小值。然而，我们可以立即指出一种特殊的变分情况，这种情况是我们必须排除的。举个例子，假设微分方程有一个特解 $z=\omega$：

$$\frac{dz}{dx}+z\frac{N}{2P}=0$$

[1] 在公式（6）中再次出现了这个错误：$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-2\frac{dv}{dx}\right)\cdots=0$。

[2] 严格来说，公式(7) 应该是$\delta^2 I=\int_{x_0}^{x_1}(\dots)+\left[\mu+z^2 v\right]_{x_0}^{x_1}$。因为 μ= 常数，这里实际上应该是等同于在手稿中的公式(7)。

或者，该公式与

(9)

是等价的，那么可得到：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{dz}{dx}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}-2v\right)z=0$$

当微分方程在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处被积分且 ω 消失时，这个极限值将为零。必须考虑到 υ是微分方程（6）的一个解，从（9）现在可以推导出

$$2v=\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}$$

(10)

但是如果将υ 视为任意量，回到最初的恒等式（7）：

$$\delta^2\Omega=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx}+z\frac{N}{2P}\right)^2+2z^2\left(M-\frac{N^2}{4P}\right)\right\}dx+\left[z^2v\right]_{x_0}^{x_1}$$

可以代入：z = π，其中π 表示微分方程的任意特解：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx}+z\frac{N}{2P}\right)^2+2z^2\left(M-\frac{N^2}{4P}\right)=0$$

(11)

极限值

$$\delta^2 I=[\pi^2 v]_{x_0}^{x_1}$$

当 π可以被确定为在定义域的边界处取值为零时，那么其函数值再次变为零。

现在我们可以立即看到，如果我们选择函数 υ，它到目前为止是一个任意的量，那么我们可以类比于公式 (10) ，得到如下结果：

$$2v=\frac{1}{\pi}\frac{d\pi}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}$$

(12)

公式（11） 中的第一项以相同的方式变为零，因此我们可以得到：

$$M-\frac{N^2}{4P}=0$$

或者，这与下式相同：

$$0=\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{dv}{dx}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}-2v\right)^2 \tag{6}$$

换言之，设 $z=\pi$ 是微分方程 (11) 的任意一个特定解，那么对于该特定解，$\delta^2 I$ 因此简化为极限值。那么我们也可以立即通过公式 (12) 得到该变换的微分方程的一个积分。将表达式（12） 代入（11），或者等价地代入（6），可得到：

$$0=\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\cdot\frac{d^2\pi}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)\frac{d\pi}{dx}-2\pi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\right) \tag{13}$$

如果这个二阶线性微分方程的通解是：

$$\pi=c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)$$

其中 c_1、c_2 表示任意常数，那么表达式（12） 给出了变换（6） 所对应的微分方程的通解，这是一个一阶微分方程；显然，常数 c_1 和 c_2 的比值在积分（12） 中起到任意常数的作用。

对微分方程（6） 的积分因此被简化为线性微分方程（13） 的积分。

我们之前已经注意到，当我们特别为任意函数 z 引入 π 时，$\delta^2 I$ 会收敛到一个极限值，可能为零。如果我们现在独立于变换来考虑$\delta^2 I$ 何时具有这一性质，我们可以按照

$$\delta^2 I=\int_{x_0}^{x_1} 2\Omega_2\,dx$$

如下方式进行：

由于Ω_2是二阶齐次函数[1]，因此得出，当对一阶变分进行已知和常用的变换时：

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} z\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_2}{\partial z'}\right)dx + \left[z\frac{\partial \Omega_2}{\partial z'}\right]_{x_0}^{x_1} \tag{14}$$

并且假设一旦 z 是方程的一个积分，表达式就会被简化为极限值

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_2}{\partial z'} = 0 \tag{13a}$$

然而，一个简单的计算使我们确信，该微分方程与线性方程（13） 1 是相等的。

对于特定的形式（13a），在这种形式下可以写出微分方程（13），这使我们发现该方程与该问题的微分方程之间存在一个重要的关系

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{15}$$

事实上，如果令

$$\Omega_1 = \delta f = z\frac{\partial f}{\partial y} + z'\frac{\partial f}{\partial y'}$$

后者也可以写为

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_1}{\partial z'} = 0$$

的形式，如果我们考虑

$$\Omega_2 = \delta^2 f = \delta \Omega_1$$

那么可以容易地得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_2}{\partial z'} &= \delta\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_1}{\partial z'}\right)\\ &= \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\end{aligned}$$

[1] 这里有插入语“((ms： 2^e 0))”。ms 可能是法语中 mais（而是）的缩写，也可能是手稿 manuscrit 的缩写，不知道原意是什么。—中译者注。

$$F(y,y')\equiv\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

因此，如果我们记

那么$\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'}$就不过是函数 $F(y+z, y'+z')$ 关于 z，z' 展开式中的一阶项的全部。现在对于

$$y=\psi(x,c_1,c_2)$$

已知微分方程问题的积分解，那么我们可以立即给出一个函数

z，使得我们有

$$F(y,y')=F(y+z,y'+z')=0$$

因此也有

$$\delta F+\delta^2F+\cdots=0 \tag{16}$$

事实上，如果我们给常数 c_1、c_2 赋予我们选择的确定值，表达式

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\psi\left(x,c_1+\varepsilon\gamma_1,c_2+\varepsilon\gamma_2\right)\\&=y+\varepsilon\left(\frac{\partial\psi}{\partial c_1}\gamma_1+\frac{\partial\psi}{\partial c_2}\gamma_2\right)+\dots\end{aligned}$$

其中 ε 表示一个充分小的量 γ_1、γ_2 是完全任意的常数，这同样满足问题的微分方程，因此为了满足上述定义的目的，我们只需令：

$$z=\varepsilon\left(\frac{\partial\psi}{\partial c_1}\gamma_1+\frac{\partial\psi}{\partial c_2}\gamma_2\right)+\dots$$

通过代入这个量，(16) 就被恒等地验证了，如果我们在除以 ε 后取极限 $\varepsilon=0$，可以得到表达式：

$$z=\pi=\frac{\partial\psi}{\partial c_1}\gamma_1+\frac{\partial\psi}{\partial c_2}\gamma_2 \tag{17}$$

满足微分方程

$$\delta F=\delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\equiv\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'}=0$$

实际上，当 γ_1、γ_2 表示任意常数时，这个表达式代表了通解。

这样就证明了雅可比的基本定理，根据该定理，随着问题的微分方程的积分，线性微分方程 (13) 的积分也同样完成了。

在前面的研究之后，现在也很清楚地表明这个变换可以在不涉及超越运算的情况下完成[注：上述定理可以用这种方式对变分法中最一般的问题进行完全相同的证明。克莱布什在 (Cr. J. LV)[1]中给出的证明也在迈耶尔的论文 (Cr69)[2]中重现， 只是一个简单的验证，而且并没有揭示定理的来源。这就是为什么上面的证明除了非常显而易见之外，还应该更值得优先考虑]

现在我们要从已发现的定理得出结论。

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\frac{N}{2P}\right)^2 dx$$

通过变换

的有效性， 正如我们所见， 只需要能够以这样的方式积分变换的微分方程， 使得积分 υ边界 x_0 和 x_1 之间不会变得无穷大。因为它的通解是

$$\upsilon = \frac{1}{2\pi}\frac{d\pi}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}$$

其中 π 表示给定的函数

$$\pi = \frac{\partial \psi}{\partial c_1}\gamma_1 + \frac{\partial \psi}{\partial c_2}\gamma_2$$

包含两个任意常数 γ_1、γ_2，所讨论的条件可以这样表达：

$$\pi = \frac{\partial \psi}{\partial c_1}\gamma_1 + \frac{\partial \psi}{\partial c_2}\gamma_2$$

只要有可能使表达式特定化，我们就有

[1] Clebsch, “Sur la réduction de la deuxième variation à sa forme la plus simple”. *In Journal de Crelle*, T. 55. 1857. p. 254_27.

[2] Mayer, “Sur les critères du maximum et du minimum des intégrales simples”. *In Journal de Crelle,* T. 69. 1868. p. 238-263.

$$\Delta(x,x_0) \equiv \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\psi}{\partial c_1}\right)_{x_0} & \left(\frac{\partial\psi}{\partial c_2}\right)_{x_0} \\ \frac{\partial\psi}{\partial c_1} & \frac{\partial\psi}{\partial c_2} \end{vmatrix} = 0$$

以使得它在区间 x_0 和 x_1 之间不会再变为零。变换就是有效的。

因为如果 $x = x'$ 是 π 的一个零点，那么容易证明，在这种情况下我们有

$$\left[\frac{d\pi}{dx}\right]_{x=x'} \gtrless 0$$

（参见 Hesse, Cr.J. LIV）1, 因此在这一点上υ肯定会变为 0。

因此， 如果我们选择任意常数 γ_1、γ_2，使得 π 在 $x = x_0$ 或一个无限接近 x_0 的某个点 $x = x_0 - \zeta$ 处为零，那么 π 的下一个零点 $x = x'$ 设定了 x_1 可以接近的极限，以保持变换的有效性。这意味着，基于将要进行得更加一般的研究，我们可以选择不提供这些结论的完整证明。

显然，这个已经被排除的极限点是由下面行列式在 x_0 领域的根来确定的

将这个结果与先前的观察比较，可以得出另一个极其重要的结论：

实际上，如果我们可以π特定化（即赋予一个特定的值），使得它在两个 x （$x = x_0$ 和 $x = x'$）的取值为零，那么对于在区间 x_0 和 x' 之间的积分 I，它的二阶变分为零，只要我们用这个特定值π 作为 z 的特殊变分来替代，这是允许的操作。当我们有 $x_1 > x'$ 时，同样的性质也适用于所提出的积分的二阶变分；因为我们只需要在区间 x_0 到 x' 内取 $z = \pi$，而在区间 x'到 x_1 内取 $z = 0$。通过这样的操作，我们的积分一般既不会成为极大值也不会成为极小值。

当积分的下限 x_0 是一个固定值时，对于积分的上限 x_1 存在一个极限值 x'，超过这个极限 x'，积分不再具有极值（即极大值或极小值）。显然，这个极限点同样由方程 $\Delta(x,x_0) = 0$ 在 x_0 邻域根来确定的。

因此， 如果我们保留积分的初始值，下述定理成立：

超过该极限值边界后，通常情况下不会再出现任何极值，这一极限值边界与变换的有效性极限是相同的。

1 Hesse, “Sur les critères du maximum et du minimum des intégrales simples”. In *Journal de Crelle*, T. 54. 1857. p. 227-273.

因此，我们可以直接推导出雅可比条件的全部内容。

借助拉格朗日变换，我们同样可以处理最一般的问题[1]：

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx = M_a^i$$

2.2 从克莱布什和雅可比的二阶变分的变换中推导判据

在变分法中，特别是涉及最一般问题的情况下，我们需要确定一组变量 $y_1, y_2, \ldots, y_n$，这些变量要满足 $m < n$ 个一阶微分方程 $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0, \ldots, \psi_m = 0$ 作为约束，这些变量是关于 x 的函数，使得所提出的积分表达式

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n')\, dx$$

取得极大值或极小值。

为了使这个问题变得可解且确定，有必要设定一些边界条件。假设在 $x = x_0$ 和 $x = x_1$ 这两个边界点处，变量 y_k 的值被一次性确定下来。所有其他情况都可以归结为这种情况。

拉格朗日乘积法允许我们以处理绝对极大值和极小值的最一般问题的相同方式来处理这个问题，我们设定：

$$\Omega = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \psi_k$$

其中 λ_k 是未知的乘子， 并对 $n + m$ 个二阶微分方程组成的整个系统进行积分

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_k'} &= 0 \quad \langle k = 1, \ldots, n \rangle \\ \psi_k &= 0 \quad \langle k = 1, \ldots, m \rangle \end{aligned} \tag{1}$$

给出所求的函数 $y_1 \ldots y_n$ 以及拉格朗日乘子 $\lambda_1, \ldots, \lambda n$，它们都是 x 的函数，并且依赖于两个任意常数 n ，这些常数是根据预先规定的边界条件来确定的。

这部分变分法求解已经完成， 结果由下式给出

[1] 在法译版中漏掉了这个公式—中译者注。

$$y_h = [y_h] = \psi_h(x, c_1, \ldots, c_{2n})$$
$$\lambda_k = [\lambda_k] = \lambda_k(x, c_1, \ldots, c_{2n})$$
$$h = 1, \ldots, n \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

(2)

这些表达式的代入应该用方括号表示。

现在，为了确定这样找到的函数系统对于积分 I 是否是达到极大值还是极小值，或者可能两者都不是，有必要研究二阶变分的符号。如果我们用一般的符号表示二阶变分[1]

$$\delta^2\Omega = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_k \partial y_i} z_k z_i + 2\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_k \partial y_i'} z_k z_i' + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_k' \partial y_i'} z_k' z_i'\right\}$$

(3)

我们有

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} 2\,\partial^2\Omega\,dx$$

对于所有满足以下 m 个条件的任意函数 zh[2]

$$\delta\psi_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right] z_k + \left[\frac{\partial\psi_k}{\partial y_k'}\right] z_k'\right\} = 0$$

其中 h = 1, 2, . . . , n，k = 1, 2, . . . ,m

(4)

这个积分必须始终满足符号恒定性。我们可以，并且这具有一定意义，引入函数 $\delta^2\Omega$ 的替代形式：

$$\Omega_2 \equiv \delta^2\Omega + \sum_{k=1}^{m}\mu_k\delta\psi_k$$

(5)

[1] 也就是说二阶齐次函数由 (3)生成，当我们通常用 $y_k + \varepsilon z_h$ 代替 y_h，并且以 ε 的幂级数展开时，取 $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ 的系数。当我们将 $y_k + \varepsilon z_k$ 代替 y_h 并将积分展开为 ε 的幂级数时，这些 z_h 的条件方程 (4) 就会出现。

这个函数不过是函数[1]

$$\Omega(\ldots y_k+\epsilon z_h\ldots\lambda_k+\epsilon\mu_k\ldots)$$

展开式中 $\frac{\epsilon^2}{2}$ 的系数。

现在有

$$\delta^2 I=\int_{x_0}^{x_1}2\Omega_2\,dx$$

直接给出的二阶变分的形式，并不能让我们立即判定其符号。因此，理论的任务是尽可能地转换δ²I，使得新的表达式满足这个要求。通过推广雅可比的基本定理（这些定理使得依赖于未知函数 y 的问题的变换成为可能），克莱布施成功地将这种变换扩展到变分法中最一般的问题。我们现在需要简要分析他的研究结果。

为了实现这种变换，我们使用了某个微分方程组的解，这些解与问题 (1) 的微分方程组之间的关系由运算符号 δ 表示；因此，该方程组

$$\delta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega}{\partial y_k'}\right)=0,\quad \delta\psi_k=0$$

或者写作

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial u_k}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial u_k'}=0,\quad \frac{\partial\Omega_2}{\partial\gamma_k}=0 \tag{6}$$

在这里，为了区分这些特定的函数系统 z_h u_k，我们下面用 u_h, r_k 来表示它们。基于这种关系，可以容易地得出一个重要定理，即通过对第一个系统 (1) 的积分，第二个系统 (6) 的积分也能够立即完成。方程组 (6) 的通解由以下公式给出：

[1] y_h 和λ_k 被 $y_h+\varepsilon_{zh}$ 和$\lambda_k+\varepsilon_{\mu k}$ 替换时，从Ω得到的函数。

$$u_h = \sum_{\lambda=1}^{2n} \gamma_\lambda \frac{\partial \psi_h}{\partial C_\lambda}, \quad h = 1, \ldots, n$$
$$r_k = \sum_{\lambda=1}^{2n} \gamma_\lambda \frac{\partial \chi_k}{\partial C_\lambda}, \quad k = 1, \ldots, m$$

(7)

其中 $\gamma_1,\ldots,\gamma_{2n}$ 表示任意常数。对于两个不同的解系 u_h, r_k 和 $\bar{u}_h, \bar{r}_k$ 存在关系

$$\sum_{h=1}^{n} \left\{ \bar{u}_h \frac{\partial \Omega_2}{\partial \left(\frac{du_h}{dx}\right)} - u_h \frac{\partial \bar{\Omega}_2}{\partial \left(\frac{d\bar{u}_h}{dx}\right)} \right\} = C$$

为进行变换，我们现在可以通过多种确定的可能方式找到 (6) 的 n 个完整的解集：

$$u_k^\sigma = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{\partial \psi_k}{\partial c_\lambda} \gamma_\lambda^\sigma$$
$$\gamma_k^\sigma = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{\partial x_k}{\partial c_\lambda} \gamma_\lambda^\sigma$$

(8)

它们具有满足一$\frac{n(n-1)}{2}$独立于 x 的条件的性质：

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ u_k^\sigma \frac{\partial \bar{\Omega}_2(u^\rho, r^\rho)}{\partial \left(\frac{du_k^\rho}{dx}\right)} - u_k^\rho \frac{\partial \bar{\Omega}_2(u^\sigma, r^\sigma)}{\partial \left(\frac{du_k^\sigma}{dx}\right)} \right\} = 0$$

(9)

如果对于 n + m 个任意量 z_h, μ_k 入如上定义的解系（8） 的线性组合

$$z_h = \sum_{\sigma=1}^{n} g_\sigma u_h^\sigma$$
$$\mu_k = \sum_{\sigma=1}^{n} g_\sigma r_k^\sigma$$

(10)

其中 $g_1 \cdots g_n$ 表示新的任意函数， 那么我们可以得到 Ω_2 的一个恒等变形，通过对它的积分可以得到

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} U_h U_i \frac{dx}{U^2}$$

(11)

在这个公式中， 我们定义

$$U_h \equiv \begin{vmatrix} \frac{dz_h}{dx} & \frac{du_1'}{dx} & \cdots & \frac{du_h^n}{dx} \\ z_1 & u_1' & \cdots & u_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n & u_n' & \cdots & u_n^n \end{vmatrix}$$

(12)

并且

$$u \equiv \sum \pm u_1^1 \cdots u_n^n$$

(13)

同时，条件方程 组（sc.h) $\delta\psi_k = 0$ 转化为

$$\sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial y_h'} \right] u_h = 0$$

(14)

从这个新的形式中，我们可以很容易地推导出 $\delta^2 I$ 保持符号恒定性的必要条件和充分条件。这些条件如下：对于 x_0 和 x_1 之间的所有 x 值， 二阶齐次函数：

$$\sum_{h,i} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} \right] u_h u_i$$

在 n 个变元 U_h 之间， 存在 m 个线性条件方程

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} U_h U_i \frac{dx}{U^2}$$

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \psi_k}{\partial y'_h} U_h = 0$$

$$k = 1, \ldots, m$$

必须始终具有符号恒定性。在这里，该问题被简化为一个已知且已解决的代数问题。

但这一判据显然只有在变换真正可能的情况下才成立。因此，为了获得完整的结果，有必要研究变换的有效性极限值，并从中得出可以简单应用的结论。因此，此处要完成的是，在引言中全面讨论的特定问题中，寻找从勒让德的不完美判定标准到拉格朗日已经日益趋近并由雅可比首次完美实现的判定标准。因此，得出了一个重要结果：积分在一般情况下绝对不可能取得极值的最极端界限，而这个界限正好是拉格朗日变换的有效性极限。雅可比本人已经在《克雷尔杂志》的第 17 卷中为未知函数的一般问题[1]建立了这个定理，但没有证明它。赫塞在他的工作中（（《克雷尔杂志》第 54 卷）设定了为这个问题进行计算的任务——事实上，他非常优雅地完成了这些计算——尽管做出了显而易见的努力，但他无法将雅可比在研究中达到的这个最终成果作为计算结果建立起来，因为只有通过这一成果，才有可能建立完美的判定标准。正是同样的困难迫使克莱布什在对变分法最一般问题的研究中功败垂成。

与特定问题完全一样，对于一般问题，我们可以先给出一个极限值 x'，上限 x_1 不应超过，甚至实际上不应达到这个极限值，以便所提出的积分（一般情况下）可能出现极值。事实上，由于 $2\Omega_2$ 是 z, z', μ的二阶齐次函数，那么我们有

$$\begin{aligned} 2\Omega_2 &= \sum_h \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} z'_h \right) + \sum_k \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} u_k \\ &= \sum_h \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} \right) \right) z_h + \frac{d}{dx} \sum_h \frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} z_h + \sum_k \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} u_k \end{aligned}$$

因此，

[1] 积分$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\, dx$达到极值。

$$\delta^2 I=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\sum_h\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h'}\right)z_h+\sum_k\frac{\partial\Omega_2}{\partial\mu_k}\mu_k\right\}dx+\left[\sum_h\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h'}z_h\right]_{x_0}^{x_1}$$

我们立即得出结论，δ^2I 对于同时满足以下微分方程组的每组解都减小到极限值。

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h'}=0,\quad \frac{\partial\Omega_2}{\partial\mu_k}=0 \tag{A}$$

现在，方程组 (A) 与之前提到的方程组 (6) 完全一致，其解是已知的。我们得出结论：在任何时候将这些解

$$u_h=\sum\delta_\lambda\frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}$$

$$r_k=\sum\delta_\lambda\frac{\partial\chi_k}{\partial c_\lambda}$$

特定化，使得 u_h 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处为零，或者对位于 x_1 邻域的某个值 $x=x'$ 处，我们也可以给出一些特定的变分，对于这些变分有

$$\delta^2 I=0$$

在前一种情况下， 它们是

$$z_h\equiv u_h \qquad \mu_k\equiv r_k$$

而在后一种情况下：$z_h=0,\mu_k=0$ 在区间$[x'...x_1]$ 内，而 $z_h=u_h$ 和 $\mu_k=r_k$ 在区间$[x_0...x']$ 内。但此时 I 通常既不能取得极大值，也不能取得极小值。

由此可见，即上限 x_1 不得达到这个极限点 x' 点，是由在以下方程在 x_0 邻域的根所定义的。

$$\Delta(x,x_0)=\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial c_1}\right)_{x_0} & \cdots & \left(\frac{\partial\psi_h}{\partial c_{2n}}\right)_{x_0}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\psi_h}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_h}{\partial c_{2n}}\end{vmatrix}=0$$

$$h=1,2,\ldots,n \tag{15}$$

我们首先必须认识到这一重要的事实。正如我们将在后面看到的， 赫塞和克莱布

什都未能克服这一困难——实际上，这并不构成一个特殊的困难——在我看来，他们未能克服的原因如下：他们两人都没有足够重视这一事实及其在雅可比判定条件中的地位，而是仅仅从计算出发，最终将要解决的问题仅仅视为一个常数的确定性问题。

事实上，克莱布什变换确实是有效的，显然，只要$U=\sum \pm u_1^1\cdots u_n^n$在边界 x_0 和 x_1 间不为零时即可换言之，为了使变换真正成为可能并且有效，我们必须能够确定变换函数 uh 或者更准确地说，能够确定出现在这些函数中的 $2n^2$ 个任意常数 $\gamma\lambda^{\rho,}$ 使得

1） $(n(n-1)/2)$ 个与 x 无关的条件 (9) 以恒等的方式得到满足

2) 对于区间内的任何 x 值， 行列式 U 都不等于零。

因此，寻找满足条件（9） 且 U 不恒等于零的最一般的常数值是必要的，然后研究在这样确定的系统中，是否有一些同时满足第二个条件。这实际上就是克莱布什采取的方法，他在假设积分常数 $c_1,...,c_{2n}$ 是正则的情况下，给出了满足第一个要求的 $\gamma\lambda^\sigma$ 的最一般值。但是由于表达式的复杂性，最后且最重要的一步的研究被证明是不可能的，问题本身也没有推进。

我们必须将理论的完整构建和最终判据的确立归功于迈耶尔先生。他采取了一条全新的、明显更有利的道路，通过选择特定且明确定义的常数，其应用将使得所有目标得以实现。然而，这样做虽然从一个严格的路径获得了结果，但这种方法有其固有的缺点。建立完全特定的常数确定方法必然带有某种偶然性和任意性，并没有清晰地呈现事物的本质。

因此，尽管结果本身没有什么补充的，但或许找到一种能够避开所有次要的计算的通用且自然的方法，直接从克莱布什和雅可比的变换出发以达到这些标准，或许仍然是有意义的。

已经证明，只要

$$U=\sum \pm u_1^1\cdots u_n^n$$

在区间$[x_0, \ x_1]$ 必须始终保持非零值，才能保证变换是有效的。因此，为了避免这种情况，需要适当地选择这些常数 $\gamma_\lambda{}^\sigma$ 。由此可见，为变换引入的函数 $u_h{}^\rho$ 在任何 x 的值的区间内不应同时为零。它们的一般形式是：

$$u_h=\sum_{\lambda=1}^{2n}\frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}\gamma_\lambda$$

我们可以以无数种方式选择 2n 个常数， 使得对于任意 x 值，$x = x_\omega$, 下列 n 个方程

$$[u_h]_\omega = \sum \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda}\right)_\omega \gamma_\lambda = 0$$

都成立。

让我们以 n 种不同的方式完成这一操作， 并用以下方式来描述其中出现的 n 个 u 系统：$u_1^\rho \cdots u_h^\rho \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n)$ 那么它们的行列式会有在 $x = x_\omega$ 时为零的性质，这一点我们通过以下符号表示

$$\mathrm{U}(x, x_\omega) = \sum \pm u_1^1 \cdots u_n^n$$

不难发现这些 u_h 函数系统适用于变换。因为首先它们满足条件方程[1]：

$$\sum \left\{ u_i^\rho \frac{\partial \Omega_2^\sigma}{\partial \left(\frac{du_1^\rho}{dz}\right)} - u_i^\sigma \frac{\partial \Omega_2^\rho}{\partial \left(\frac{du_i^\rho}{dx}\right)} \right\} = 0$$

对于 $x = x_\omega$, 并且由于这些方程与 x 无关，因此它们是恒等的。其次，很明显，无论我们如何随意地从 n − 1 个任意函数中选取 u_h,$u(x,x_{(\omega)})$ 都不可能恒等于零。而对于变换有效的情况，$U(x,x_\omega)$ 现在不能在 x_0 和 x_1 之间的任何 x 值处为零。

首先，我们要知道方程

$$U(x,x_\omega) = 0$$

的根的性质是什么。

如果 $x = x_\pi$ 代表任何使 U（x, x（I））变为零的值，显然可以确定常量 g1,...,gn，使它们满足 n 个线性方程

$$0 = g_1 \left[u_1^1\right]_{x=x_\pi} + g_2 \left[u_1^2\right]_{x=x_\pi} + \cdots + g_n \left[u_1^n\right]_{x=x_\pi}$$

$$0 = g_1 \left[u_n^1\right]_{x=x_\pi} + g_2 \left[u_n^2\right]_{x=x_\pi} + \cdots + g_n \left[u_n^n\right]_{x=x_\pi}$$

[1] 在手稿中，错误地写为$\sum \{u_h^\rho \cdots\} = 0$。

因此，变量

$$u_h = g_1 u_h^1 + \ldots + g_n u_h^n$$

具有在 $x = x_\omega$ 和 $x = x_\pi$ 时变为零的性质。它们构成了一个新的积分系统（与相应的变量 t 相关）的微分方程 (9)，并且同样具有如下形式

$$u_h = \sum \frac{\partial \psi_k}{\partial c_\lambda} \bar{\gamma}_\lambda$$

方程 $U(x_\pi, x_\omega) = 0$ 意味着存在一个量$\bar{\gamma}_1 \ldots \bar{\gamma}_n$ 的系统， 使得$\bar{\gamma}_1 \ldots \bar{\gamma}_{2n}$

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial C_\lambda} \right)_\omega \bar{\gamma}_\lambda = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{2n} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial C_\lambda} \right)_\pi \bar{\gamma}_\lambda = 0$$

成立。但使得这些方程存在的必要和充分条件是[1]

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial c_1} \right)_\omega & \cdots & \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial c_{2n}} \right)_\omega \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial c_2} \right)_\pi & \cdots & \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial c_{2n}} \right)_\pi \end{vmatrix} = 0$$

$$h = 1, 2, 3, \ldots, n$$

或者，应 用我们的判定式：$\Delta(x, x_\omega) = 0$。因此， 我们推断出方程 $U(x, x_\omega) = 0$ 的所有根都包含在方程 $\Delta(x, x_\omega) = 0$ 的根中。

我们首先知道， 方程 $\Delta(x, x_0) = 0$ 定义了极值点 $x = x'$, 为了使极值成为可能， 上限 x_1 不能超过或达到这个点。我们的工作因此是证明常数的确定[2]可以一直进行到 $x = x'$。而不会使 U 变为零。

根据之前证明的定理， 实现这一点是很容易的，x_ω 始终表示 x 的任意值。如果我们取 $x_\omega = x_0 - \zeta$, 其中 ζ 表示一个非常小的量，并以任何方式确定常数，使得 U 转化为 $U(x, x_0 - \zeta)$，那么它肯定对 $U(x, x_0 - \zeta) = 0$ 的下一个根 x_ε之前都是有效的。然而，根据该定理，我们得出结论，我们也必须同样有$\Delta(x, x_0 - \zeta) = 0$。如果我们展开这个公式，可以得到

$$0 = \Delta(x_\epsilon, x_0) - \zeta \left(\frac{d\Delta(x_\epsilon, x)}{dx} \right)_{x = x_0} + \cdots$$

[1] 在手稿中，错误的写成了$\left| \left(\frac{\partial \psi}{\partial c} \right. \right.$

[2] 即 γ_i 的确定。

随着 ζ 减小，我们立即发现 x_ε 必须位于方程 $\Delta(x,x_0)=0$ 的根 $x=x_\pi$附近，使得 $x_\varepsilon=x_\pi\pm\tau$，其中 τ随着ζ 无限小的量。

因此，变换肯定可以通过多种方式执行， 使得它的有效性从 x_0 扩展到邻近点，我们可以任意减小这一邻近点，直到 下一个离 x_0 最近的根[1]，该根由方程$\Delta(x,x_0)=0$给出。因为根据之前的结论，方程的有效性可以确定在 $x=x_\pi$ 附近，如果 x_π 是该方程的第二个根，那么该变换在$x=x'$时仍然是有效的。

此外， x_π 必须等于 x'是里什莱（Richelet）[2]解释的结果。在满足所有给定条件的前提下，常数是确定的，那么 $\delta^2 I$ 就不会消失。由此可以推断，不存在 x_0 和 x' 给定的区间之外的 有效的常数确定方式，因此，x 的取值范围不能超出 x_0 和 x' 之外。通过证明定理，在所有情况下，变换在 x_0 和 x' 之间都可实现，我们已经实现了既定目标；因为现在必要和充分条件的判据很容易得出。这个方法可以被认为是所有可能的特殊常数确定的真正来源。

我们很容易看到，迈耶尔先生的常数确定方法方式构成了这种一般确定方式的一个特例（参见 Crelle 期刊第 69 期，第 250 页顶部）[3]，而且更为简单。我们现在可以根据我们的需要大量建立这些，但这对理论而言并没有什么意义。以下是一个简单的特定化示例：

我们选择变换函数 u_h^ρ, 使得

1) 当 $x=x_\omega$ 时， 它们都等于零，

2) 对于区间内的任意值，$x=x_{\bar\omega}$有

$$u_1^1=u_2^2=\cdots=u_n^n=1$$

并且所有其他函数都等于零。那么 $U(x_{\bar\omega},x_\omega)$ 的值为 1，因此允许这种常数的选

$$\sum\left[\frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}\right]_{x_\omega}\delta c_\lambda^\rho=0$$
$$\sum\left[\frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}\right]_{x_\omega}\delta c_\lambda^\rho=\delta_{h,\rho}$$

择。常数完全由以下方程确定：

[1] 在手稿中，“最近的”被划掉了。

[2] *Journal de Crelle*, Volume 69, p. 256.

[3] “我们很容易意识到……第 250 页上方”这一句在手稿的边缘处。

或

$$\delta_{h\rho} = \begin{cases} 0 & \text{当 } h \neq \rho \\ 1 & \text{当 } h = \rho \end{cases}$$

由此可得

$$\gamma_{\lambda}^{\rho} = \frac{1}{\Delta(x_{\bar{\omega}}, x_{\omega})} \cdot \frac{\partial \Delta(x_{\bar{\omega}}, x_{\omega})}{\partial \left[\frac{\partial \psi_{\rho}}{\partial c_{\lambda}} \right]_{x_{\bar{\omega}}}}$$

很容易得出，现在 $U(x,x_{\omega})$ 被变换为

$$U(x, x_{\omega}) = \frac{\Delta(x, x_{\omega})}{\Delta(x\bar{x}_{\omega}, x_{\omega})} = \xi \Delta(x, x_{\omega})$$

当 ξ 表示在特定条件下取值不同于 0 和无穷 (∞) 的常数时， 且 $x\bar{\omega}$被相应地选择时， 那么变换就成立。

2.3 极值存在的边界条件

对于由一阶变分消失而产生的微分方程的积分，修改后积分ΔI 的完整展开形式如下[1]：

$$\Delta I = \frac{1}{2!}\delta^2 I + \frac{1}{3!}\delta^3 I + \ldots$$

如果不存在特殊变分 z_h 使得 $\delta^2 I$ 为零的情况，ΔI 的符号始终仅取决于$\delta^2 I$ 的符号。因此我们有完全可靠且充分的判据。

然而， 当积分的上限 x_1 达到或超过由方程 $\Delta(x,x_0) = 0$ 定义的某个极限点 x'时，对于这个点我们总能给出一个特定的变分系统，使得 $\delta^2 I = 0$。因为一般由于在点 x' 处，二阶变分与三阶变分不会同时为零，因此，可以合理地说，在点 x'处，极大值和极小值的性质一般情况下不再成立。

然而， 如果三阶变分 $\delta^3 I$ 的值也为 0，而四阶变分$\delta^4 I$ 具有恒定的符号， 对于这些特定的变分，积分似乎会在距离初始极值点 x'尽可能远的地方出现的极值。我们可以用以下方式计算：

[1] 当我们只保留到二阶项时，该公式就简化为: $\Delta I \approx \frac{1}{2!}\delta^2 I$。简化后的公式就是著名的“最小作用量原理”的数学表达式，在分析力学和场论中有很广泛的应用——中译者注。

对这些特定情况进行更细致的研究无疑具有理论价值，而且，找到一种简单且易于应用的方法来区分这些情况，从实际角度来看可能是最有用的。因为对于一个以特定形式出现的问题，几乎不可能直接判断这两个条件是否满足。因此，我们永远无法确定是否我们确实没有遇到类似的例外情况。

事实上已经有很多尝试处理这种形式的极值问题。对于需要处理的最普遍的问题，其积分为：

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

我们有艾德曼（G. Erdmann）的详细讨论 (Schlomilch 评论 XXII, XXIII,XXVI), 甚至考虑了直到任意阶数 $2k-1$ 的所有变分为零的情况。但是，这些努力被我的老师魏尔斯特拉斯先生在 1879 年夏季课程[1]严格证明的一个定理所否定，该定理如下：

当 $x = x'$ 作为讨论中的极限点时，任何情况下，只要有 $x_1 > x'$

那么$I = \int_{x_0}^{x_1} f\,(x, y, y')\, dx$ 在该点处都不能具有极大值或极小值。

在这个问题中，判断积分是否具有极大值和极小值，仅通过观察二阶变分（的符号）就足够了。

我们倾向于假设相应的定理也适用于一般问题。然而，魏尔斯特拉斯先生的证明并不允许我们将其推广到最一般的问题。事实上，这个问题本质上依赖于以下定理，这个定理已经在赫塞的工作中被注意到：

如果量

$$\Delta(x, x_0) = \frac{\partial \psi}{\partial c_2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial c_1}\right)_{x_0} - \frac{\partial \psi}{\partial c_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial c_2}\right)_{x_0}$$

在 $x = x'$ 时等于零， 那么

$$\left[\frac{d}{dx}\Delta(x, x_0)\right]_{x=x'}$$

不等于零。

定理对于方程 $\Delta(x,x_0) = 0$ 的每个根 x' 都成立，因此也适用于 $x' = x_0$ 。我们可以立即看到，同样的定理在一般问题中并不成立；因为很明显，在 $x = x_0$ 时，$\Delta(x,x_0)$ 的

[1] 胡塞尔有这些课程的速记稿。参见：Weierstrass, “Cours sur le calcul des variations”. In *Ouvrages mathematiques* Volume 7, Leipzig, 1927, p. 154, 163. 其中可以找到稍加推广并以不同形式表述的该定理。

前 n-1 阶导数都为零。

如果假设 $\Delta(x,x_0)$ 在等于零时发生符号变化，同时去除值为零的特殊情况值 $x = x_0$，那么，魏尔斯特拉斯先生的证明就可以很好地推广；但是要一般性地证明这个假设似乎很困难——即便它是正确的。由于我无法做到这一点，我不会在这里重复这个证明，而是通过一条全新的路径来尝试证明这个重要定理。

为了简单起见，我将讨论范围限制在绝对极大值和极小值的一般问题。需要明确指出的是，在进行一些不重要的小的修改后，下面的讨论对于考虑在经过一些微小的、不言自明的修改后，对于极大值或极小值[1]的一般问题仍然有效。

根据魏尔斯特拉斯先生的推理，我把方程 $\Delta(x,x_0) = 0$ 在 x_0 附近的根 x' 称为“x_0 的共轭值”（或“共轭点”），并将它们一起称为“共轭值对”（或“共轭点对”）。

首先我要指出，由变换得出的条件在 x_1 位于共轭点 x' 之后时也必须满足。因为如果我们将积分路径从 $x_0 \to x_1$分成几部分，使得其中任何一部分都不包含超过一对共轭点，那么该变换对于每个对应的积分都是可行的。因此，很明显，如果在 x_0 和 x_1 之间有极值出现，关于 n 个任意变量 $U_1 \ldots U_n$ 的二阶齐次函数

$$2W = \sum_{h,i} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i$$

对于 x_0 和 x_1 之间的所有 x 必须始终具有固定的符号。这表示一个“确定形式”，它仅在所有变量都等于零时才会消失。

为了方便起见，我们将积分 I 从上下限 $x = x_\alpha$ 到 $x = x_\beta$之间的部分定义为 $I_{\alpha\beta}$，对于我们选择的变分 z_h，我们有如下公式：

$$\delta^2 I_{01} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} \right) z_h \, dx + \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} z_h \right]_{x_0}^{x_1}$$

现在我们假设区间 $[x_0; x_1]$包含与 x_0 共轭的点 x'，但不包含任何其他与 x' 共轭的同类点 x''。

我们现在确定两个微分方程的解集

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} \right) = 0$$

[1] 手稿中写作：Ma^{ε}。

(I)

设

$$z_1 = u_1,\, \ldots,\, z_n = u_n$$

和

$$z_1 = w_1,\, \ldots,\, z_n = w_n$$

使得我们有

$$[u_h]_{x=x_0} = 0, \quad [u_h]_{x=x'} = 0$$

(1)

$$[w_h]_{x=x_a} = [u_h]_{x=x_a}, \quad [w_h]_{x=x_1} = 0$$

(2)

在这里，x_a 表示区间内 x 的任意值，该值的选择必须确保满足在 x_a 和 x_1 之间不存在任何共轭点对。假设这一点成立，我们可以引入以下特殊变分系统：在区间 $[x_0,x_a]$ 内，令：$z_h \equiv u_h$；而在区间 $[x_a,x_1]$ 内，令 $z_h \equiv w_h$

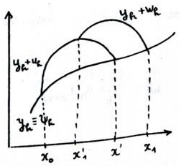


图 1

实际上，根据假设：

$$[z_h]_{x_0} = 0, \quad [z_h]_{x_1} = 0$$

根据微分方程系统（I），二阶变分取如下形式：

$$\begin{aligned}
\delta^2 I_{01} &= \delta^2 I_{0a} + \delta^2 I_{a1} \\
&= \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_h'} u_h - \frac{\partial \Omega_2}{\partial w_h'} w_h \right]_{x=x_a} \\
&= \sum_{h=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_h'} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial w_h'} \right) u_h \right]_{x=x_a}
\end{aligned}$$

现在假设 $x_0 = x_1'$是与 x_1 共轭的点，位于 x_0 和 x' 之间；那么我们可以给 x_a 赋值为所有在 $x_1'+\delta$, x_1 之间所有 x 的值，其中δ表示充分小的量[1]，对于每一个这样的值，上述推导公式都是有效的。现在我们令

$$f(x_a) = \sum_{h=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_h'} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial w_h'} \right) u_h \right]_{x=x_a} \tag{3}$$

我们假设条件（1） 和（2） 始终成立，x_a 以连续的方式从 $x_1'+\delta$变换到 x_1。同样，显而易见的是，函数 $f(x_a)$ 会随着 x_a 的变化而变化，并且可以对其进行求导。需要注意的是，我们有

$$\frac{d}{dx_a} [u_h]_a = \left[\frac{du_h}{dx} \right]_{x=x_a}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{df(x_a)}{dx_a} &= \sum_{h=1}^{n} [u_h]_{x_a} \frac{d}{dx_a} \left[\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_h'} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_h'} \right]_{x_a} \\ &+ \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{du_h}{dx} \right]_{x_a} \cdot \left[\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_h'} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial w_h'} \right]_{x_a} \end{aligned}$$

由此可得

$$\left[\frac{df(x_a)}{dx_a} \right]_{x_a=x'} = \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{du_h}{dx} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_h'} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_h'} \right) \right]_{x=x'}$$

因为根据（1），我们有 $[u_h]_{x=x'} = 0$。

如果我们进一步考虑，一般来说，对于任意的 z, z'，我们有[2]

1 “足够小”为胡塞尔后来插入。

2 通过对(3) 关于 z_h 进行微分 （参见第 II 章，第 18 页），显然地，我们还必须对 i 求和。

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} z_i' + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i} z_i \right)$$

很容易得出

$$\left[\frac{df(x_a)}{dx_a} \right]_{x_a = x'} = \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} \frac{du_h}{dx} \left(\frac{du_i}{dx} - \frac{dw_1}{dx} \right) \right]_{x=x'}$$

现在，很显然，我们必须有

$$\left(\frac{dw_i}{dx} \right)_{x=x'} = 0$$

事实上，对于 $x_a = x'$，我们的变分定义如下：

（1） 在区间$[x_0 \ldots\ldots x']$内，$z_h \equiv u_h$

（2） 在区间$[x' \ldots\ldots x_1]$内，$z_h \equiv w_h$

并且我们必须有 $[w_h]_x = [u_h]_x = 0$ 以及 $[w_h]_x = 0$

现在，由于 x' 和 x_1 不能构成一对共轭点，那么 w_h 必须恒等于零。因此我们有 $\frac{dw_h}{dx} \equiv 0$

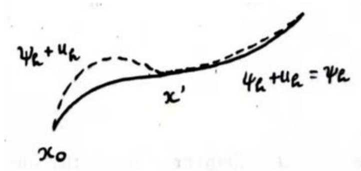


图 2

并由此可得

$$\left[\frac{df(x_a)}{dx_a} \right]_{x_a = x'} = \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} \frac{du_h}{dx} \frac{du_i}{dx} \right]_{x=x'}$$

并且在这个公式中，u_h 表示由方程严格决定的函数

$$[u_h]_{x_a} = \sum \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda} \right)_{x_0} \gamma_\lambda = 0$$

$$[u_h]_{x'} = \sum \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda} \right)_{x'} \gamma_\lambda = 0$$

我们现在必须注意确保所有量满足以下条件：

$$\frac{du_h}{dx} = \sum \psi_h^\lambda(x)\,\gamma_\lambda$$

其中，为了方便起见，我们定义

$$\psi_{h\lambda}(x_0) = \frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda}$$

而当 $x = x'$ 时，这些量不能为零。

这实际上要求行列式

$$\begin{vmatrix} \psi_{h,1}(x) & \cdots & \psi_{h,2n}(x) \\ \psi'_{h,1}(x) & \cdots & \psi'_{h,2n}(x) \end{vmatrix} = D(x)$$

$$h = 1, 2, \ldots, n$$

在 $x = x'$ 时为零。然而，可以证明，对于所考虑的任何 x 值，$D(x)$ 都不能等于零。

如果我们现在假设，对于 x_0 和 x_1 之间的所有 x 值，都能满足出现极值的必要条件，那么这个量

$$\sum_{h,i} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_h \partial y'_i} \frac{du_h}{dx} \frac{du_i}{dx}$$

在 $x = x'$ 时不会消失，而是具有一个非零值。

因此，我们得到以下结果：

$$\left[\frac{df(x_a)}{dx_a} \right]_{x_a = x'} \gtrless 0$$

然而与此同时，我们有 $f(x') = 0$，正如命题（3）所述。因此，函数 f （x_a) 在 经过点 $x_a = x'$ 时符号发生了改变。

很容易看出这一结果的重要性：$f(x_a)$ 无非就是通过由公式（1） 和（2） 定义的特殊变分时得到的二阶变分的值。因此，我们首先选择这些变分，使得在替代这些变分后， $\delta^2 I$ 的取值 $f(x'-\delta)$，且同时取值 $f(x'+\delta)$；因此，我们的结果就表明 $\delta^2 I$ 的这两个值具有相反的符号。由此证明，在与起始点 (x_0) 共轭的点 (x') 处，积分的极大值性质确实不再存在。

我还找到了针对变分法这个基本定理的第二种证明，其基本原理非常简单。但对其进行严格论述则需要相当广泛的考量，如果在这里阐述会让我们偏离讨论的范围。

3. 胡塞尔博士论文解析

3.1 关于一般变分法理论的简单问题的阐明*

胡塞尔介绍了雅可比在处理这一“最简单问题”时的开创性工作。在传统的变分计算理论中，只有当 y(x)满足一个二阶微分方程时，才可能得到解。这个方程由积分 I 的“一阶变分”给出。然而，判断 y(x)是使 I 达到极大值还是极小值的问题，需要计算并分析“二阶变分”$\delta^2 I$ 的符号。数学家勒让德和拉格朗日在此之间都未能成功解决这个问题。胡塞尔认为，雅可比的工作同时提供了充分和必要条件，似乎完美地解决了这个问题。雅可比发现可以通过执行某种变换来简化第二变分的表达式，从而更容易确定其符号。这项工作的核心在于：问题所对应的微分方程 （也就是说，只有它的积分本身能够解决所提出的问题）被积分时，变换所涉及的微分方程会自动被积分。

胡塞尔以一个只包含一个因变量且变分积分中仅出现一阶导数的情形为起点：

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx \tag{1}$$

这里，f 是关于 x、y 以及 y' 的函数，y' 表示 y 对 x 的导数。

首先考虑(1)的极值存在的一阶变分为零的欧拉方程：

* 附录三中关于变分计算的数学史内容作为《胡塞尔博士论题中的变分法研究及其与本质变更的关系》的第 3 节，发表于《中国现象学与哲学评论》2024 年第 2 期。**其中第 3.2 节的（7）-（13）公式并非胡塞尔本人的公式，而是来自克雷格·弗雷泽**（Craig Fraser）的 “Edmund Husserl’s Contributions to the Second Variation in the Calculus of Variations.”（*Serva di due padroni: Saggi di storia della matematica in onore di Umberto Bottazzini*, edited by Alberto Cogliati, Egea, 2019, pp. 263–289.）一文的 4.0.1 节。弗雷泽对胡塞尔的变分公式进行了当前标准化的数学表达。由于本人的粗心错漏和笔记杂乱，将其误作为胡塞尔本人的数学公式而使用了（7）-（13）公式以及 3 句相关表述，而没有引用该篇重要的数学史文献。现已在对应部分进行了补充和注释。感谢王知飞博士提醒我注意到这一点。克雷格·弗雷泽（Craig Fraser）讨论了胡塞尔博士论文中的三分之一的工作，具体参见本文 1.1.2.1 节。

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{2}$$

勒让德观察到，满足这一方程的给定解不一定会产生最大值或最小值。用现在的术语来说，欧拉方程是求解变分问题的一个必要但不充分的条件。因此，勒让德推导出了一个关于变分被积函数的二阶偏导数符号的额外条件。胡塞尔在探讨二阶变分问题时，通过引入辅助函数 v(x) 和精细化分析，进一步化简了问题，并导出了勒让德条件和雅可比微分方程。如果变量 y 的变分 δy 用 z 表示，即 $z=\delta y$，那么二阶变分的标准形式可以表示为:

$$\delta^2 I = \int_{v_0}^{r_1} 2\Omega_2 \,\mathrm{d}x \tag{3}$$

其中：

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2}z^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y}zz' + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'^2}z'^2 \tag{4}$$

Ω_2 的表达式比较复杂，包含了 y 和 y'的各种偏导数项，为了研究第二变分 Ω_2 的正负性从而判断泛函是否取到极值。胡塞尔采取了一种分解的技巧，将 Ω_2 分成两部分:Ω_2 =（I）+（II）$_y$。其中（I）的部分是$\frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$，（II）y 的部分是$\Omega_2$ 中剩余的所有包含 y 和 y'的其他项。其中在（I）中会导出勒让德条件：$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0$与导出另一个与 f 的偏导数相关的判别式条件：$M-\frac{N^2}{4P}\geq 0$[1]，它们共同构成极值存在的必要条件和充分条件：因为（I）部分必定为正，那么通过控制（II）$_y$部分的大小，就可以最终确定 Ω_2 的正负性，进而推导出使泛函取极值的判据。胡塞尔通过这种分解，最终导出了勒让德条件和雅可比方程。

在（4）的基础上，胡塞引入了辅助函数 v = v（x）为了化简二次变分 δ^2I 的表达式：

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} (Pz^2 + 2Qzz' + Rz'^2)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

其中 P、Q、R 是仅依赖于 x 的函数：

[1] 其中，M = 1/2 (∂^2f)/(∂y^2)；N = (∂^2f)/(∂y ∂y') P = 1/2 (∂^2f)/(∂y'^2)

$$P=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad Q=\frac{\partial^2 f}{\partial y'\partial y},\quad R=\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \tag{6}$$

化简后得到：

$$\delta^2 I=\int_{x_0}^{x_1}\left(R\left(z'+\frac{Q-2v}{R}z\right)^2+2z^2\left(\frac{1}{2}P-v'-\frac{(Q-2v)^2}{2R}\right)\right)dx+\left(2vz^2\right)\Big|_{x_0}^{x_1} \tag{7}$$

假设(7)中的判别式为零：

$$\frac{1}{2}P-v'-\frac{(Q-2v)^2}{2R}=0 \tag{8}$$

然后通过部分积分(7)简化为

$$\delta^2 I=\int_{x_0}^{x_1}\left(R\left(z'+\frac{Q-2v}{R}z\right)^2\right)\mathrm{d}x+\left(2vz^2\right)_{x_0}^{x_1} \tag{9}$$

胡塞尔在这里推导出了用于最大值或最小值判定的勒让德（Legendre）条件。这个结论是基于我们可以在区间[x_0; x_1] 上找到一个合适的函数 v 的假设。虽然变换的方法起源于勒让德，但胡塞尔将该理论归因于拉格朗日（Lagrange）。因为勒让德的条件是不充分的。他没有考虑变换后的表达式可能变为无穷大的情况。拉格朗日进一步指出，变换只有在满足以下条件时才是有效的：

（1）变换后的表达式在整个区间内都是有限的。

（2）变换后的表达式在边界点上等于零。

为了检验这些条件，拉格朗日尝试对一个特定的非线性一阶微分方程进行积分。变换后的二阶变分导出的欧拉-拉格朗日方程就是前述公式（2）。但拉格朗日在解决该方程时发现该方程可以是非线性的，而且可能没有解析解。尽管如此，拉格朗日的工作还是让胡塞尔注意到不仅要考虑变换后的表达式是否有限，而且要考虑它在边界点上的值。

胡塞尔紧接着讨论了拉格朗日提出的变换后的表达式在边界点上等于零的情况，他首先关注二阶变分等于零，并导出了雅可比微分方程。他通过将(17)的二阶变分设为零而得到微分方程：

$$R\left(z'+\frac{Q-2v}{R}z\right)^2+2z^2\left(\frac{1}{2}P-v'-\frac{(Q-2v)^2}{2R}\right)=0 \tag{10}$$

目标是找到这个非线性方程中 z 的一个解 z＝π（x）。为此，假设（10）中的第一项等于零：

$$R\left(\pi'+\frac{Q-2v}{R}\pi\right)^2=0 \tag{11}$$

（10）和（11）意味着

$$\frac{1}{2}P-v'-\frac{(Q-2v)^2}{2R}=0 \tag{12}$$

使用（11）和（12）我们消除 v 得到雅可比的微分方程：

$$R\pi''+R'\pi'+(Q'-P)\pi=0 \tag{13}$$ [1]

胡塞尔观察到，如果函数 z 满足线性微分方程，π（x）是（13）的一个解，那么积分项就消失了（9）中给出的二次变分简化为其极限值：

$$\delta^2 I=\left(2v\pi^2\right)_{x_3}^{x_4} \tag{14}$$

最后，胡塞尔指出，方程（13）的解可以直接从欧拉方程（2）的解中导出，无需进行复杂操作。设 $y=\Psi$（x,c_1,c_2）是（2）的通解，那么（13）的通解为：

$$\pi=a_1\frac{\partial\Psi}{\partial c_1}+a_2\frac{\partial\Psi}{\partial c_2} \tag{15}$$

其中 a_1,a_2 是任意常数。

这个简化的证明过程突出了胡塞尔工作的第一个贡献，即胡塞尔补充证明了雅可比的方法确实避免了直接求解欧拉-拉格朗日方程所需的复杂或超越操作。这种方法的关键在于选择适当的变换，并确保这些变的换在给定的区间内保持有限。通过这种方

[1] 此处判别式为现代数学中的标准缩写形式，公式推导使用了 Fraser, C. “Edmund Husserl’s Contributions to the Second Variation in the Calculus of Variations.” *Serva di due padroni: Saggi di storia della matematica in onore di Umberto Bottazzini*, edited by Alberto Cogliati, Egea, 2019, pp. 277–278

式，我们可以将原始的变分问题转化为一个更简单的问题，进而得到解。胡塞尔进一步证明了与变换问题无关的二阶变分为零的其他条件。并且指出，只有通过赫塞、克莱布什、迈耶尔的基本工作，雅可比处理的二阶变分问题以及变分计算中更一般问题才能够完全确立。[1]

3.2 从克莱布什到雅可比的二阶变分变换中推导出判别式

考虑了最简单的变分问题，胡塞尔转向了一般变分问题，涉及 n 个因变量 $y_1,...,y_n$ 的变分积分：

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx \tag{16}$$

目的是将二阶变分 $\delta^2 I$ 化为积分形式：

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_k \partial y_j} \right) U_k U_j \tag{17}$$

其中 $\Omega = f - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) y_i'$ 是欧拉方程附加项

$$U = |\, u_b \,|; \quad Uj = |z_1, \ldots, z_{j-1}, u_j, z_{j+1}, \ldots, z_{n}| \tag{18}$$

U 表示一个由特殊变分 u_b 构成的行列式，这里的 u_b =（$u_1, u_2, \ldots, u_n$）是一个 n 元向量。U_j 是一个通过 u_b 中的第 j 个分量 u_j 被主变分 z_j 替换得到的行列式。u_b 和 U_j 满足微分方程组：

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ u_k \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial (du_k/dx)} \right) - u_k' \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_k} \right) \right\} = c_k \tag{19}$$

这是胡塞尔利用线性代数性质进行简化的关键方程，它可以通过满足特定条件的系数来解决变分问题，c_k 为常数。因为有 n 个因变量，所以（18）一共有 n 个这样的方程。每个方程都是 u_k 的函数，对 u_b 中的系数施加一定的条件和限制。一共有 n 个这样的方程，相当于对 n^2 个未知数（u_b 中的系数）施加了 n 个条件。这 n 个方程不是线性无关的，实际上只给出了 n（n-1）/ 2 个独立的条件。所以一共有 n（n-1）/ 2

[1] Husserl, Edmund. *Contributions à la théorie du calcul des variations.* No. 65 of Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics (Eds. A.J. Coleman et al.). trans. Mademoiselle Devouard. ed. J. Vauthier. Ontario, Canada: Kingston. 1983. p. 11.

个方程，对 u_b 中的系数施加了约束条件。因此，当 n>1 时,就出现了这 n（n-1）/ 2 个耦合方程，给 u_b 中系数的解带来了复杂性，但当 n=1 时，只有一个因变量，因此不存在复杂的方程组。

在此基础上，胡塞尔引入判定式 Δ（x, x_0）来表达雅可比条件，其中Δ（x_0, x_0）= 0，如果 x 与 x_0 是共轭点，则Δ（x, x_0）= 0。根据雅可比条件，在无共轭点的区间（x_0, x_1）上，Δ（x, x_0）≠ 0。假设雅可比条件成立，则梅耶（Meyer）的主要成就是找到一组满足必要条件的函数 u_b 使得：

$$\Delta(x,x_\omega) = CU(x,x_\omega) \tag{20}$$

其中 C 是常数，x_ω是 x 的任何值，在该值处 Δ 和 U 等于 0。为此他考虑了规范形式的变分方程，用规范积分常数表示 u_b 系数。

然而胡塞尔指出对 u_b 系数的选择做出任意性假设是不必要的，这并不涉及任何特定的选择过程。正如胡塞尔所指明的：

> 尽管迈尔的方法以严谨的方式得出了结果，但这种方法确实存在一些不足。要完全特定地确定常数，必然涉及到某种偶然性、某种任意性，并且并没有确定量的基础。尽管对这些结果没有什么可补充的，但如果能找到一种通用且自然的方法，避免所有次要的计算，以直接从克莱布什和雅可比的变换出发获得这些标准，那么这样做并非没有意义。[1]

胡塞尔指出，（20）式不必推导。设 V 是 $\Delta = 0$ 的解空间，W 是 $U = 0$ 的解空间。如果解（$y_1,\ldots,y_n$）∈ W，则由（18）式：

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y_j}\right)z_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y'_i}\right)z'_i = 0$$

这蕴含着（$y_1,\ldots,y_n$）∈ V，即 $W \subseteq V$。因此只需确保 $u_b \in W$，就自动满足 $\Delta = 0$，不需导出（20）式。

[1] Husserl, Edmund. *Contributions à la théorie du calcul des variation*s. p. 38.

胡塞尔阐明了迈耶尔方法的任意性假设和复杂计算。迈耶尔默认 u_b 系数必须用规范积分常数表示，而克莱布什后来正式提出了这种描述变换函数的方法，从而加强了这一假设。而胡塞尔意识到，迈耶尔的结果实际上并不需要一个特定的选择过程，其中变分表达式中的系数表示为出现在欧拉方程解中的积分常数的函数。胡塞尔洞见涉及到今天被称为线性代数的基本属性，没有任何特殊假设，使得变分理论的处理更加自然。

3.3 极值存在的条件

3.3.1 在一般情况下判断极值存在的充分必要条件

胡塞尔首先讨论了对于一个积分泛函

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx \tag{21}$$

通过级数展开，ΔJ 可以表示为各阶变分的无穷和：

$$\Delta J = \frac{1}{2!}\delta^2 J + \frac{1}{3!}\delta^3 J + \cdots \tag{22}$$

胡塞尔指出积分变化 ΔJ 的符号是判断极值存在的充分必要条件。然而，如果二次变分 $\delta^2 J$ 在特殊点处为零，那么这种判断方法就会失效。

胡塞尔进而开始探讨二阶变分$\delta^2 J$ 为 0 的特殊点：如果 x′ 处，有

$$\left[\frac{df(x_a)}{dx_a}\right]_{x_a=x'} \neq 0 \qquad \text{且} \quad f(x') = 0 \tag{23}$$

那么在 x′ 处，积分泛函 I 不可能取得最大值，这就是由雅可比提出并有魏尔斯特拉斯定义的共轭点：在共轭点处，虽然二阶变分为零，但通过考虑高阶变分如三次变分 $\delta^3 J$ 和四次变分 $\delta^4 J$，仍可能存在极值。但是胡塞尔指出了这里的问题所在：

> 我们有埃德曼（G. Erdmann ）的详尽论文（Schlomilch 杂志 XXII，XXIII，XXVI），甚至考虑了所有变化的情况，直到任何阶数 2k-1 消失。但这些努力因我的老师魏尔斯特拉斯先生在 1879 年夏季课程中严格证明的一个定理而变得

徒劳。[1]

3.3.2 对魏尔斯特拉斯的判定极值方法的推广

胡塞尔回顾了埃德曼和魏尔斯特拉斯（Welerstrass）在这一领域的重要工作。其中，魏尔斯特拉斯的定理是整个论述的出发点，它指出积分泛函：

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx \tag{24}$$

如果 $x_1 > x'$，那么在点 $x = x'$ 处，积分 I 不可能取得最大值。[2]

魏尔斯特拉斯定理为判断极值存在性定理从根本上限制了积分泛函在某些条件下存在极值的可能性，但是胡塞尔认为

> 魏尔斯特拉斯的证明可以很好地推广；但似乎很难一般性地证明这个假设——即使它是正确的。由于我无法做到这一点，我不会在这里重现这个证明，但我会通过一条全新的路径尝试证明这个重要定理……遵循魏尔斯特拉斯先生的推理，我将称方程Δ(x, x_0) = 0 中位于 x_0 非常接近的根 x′ 为 x_0 的“共轭值或点”，并且同样地将这两个一起称为“一对共轭值或点”。[3]

胡塞尔将在共轭点 x′ 附近，函数 f（x_a）被定义为：

$$f(x_a) = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial u'_h \partial u'_h} - \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial w'_h \partial w'_h} \right) u_h \Bigg|_{x=x_a} \tag{25}$$

其中 u_h 和 w_h 是满足边界条件的函数，满足以下关系：

$$[u_h]x_0 = [u_h]x = 0;\ [w_h]_x = 0 \tag{26}$$

并且在共轭点 x′ 处，有$\frac{du_h}{dx} \neq 0$，而$\frac{dw_h}{dx} = 0$。利用这些性质，可以推导出：

$$\left[\frac{df(x_a)}{dx_a}\right]_{x_a=x'} = \sum_{i,h=1}^{n} \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial y'_h \partial y'_i} \frac{du_h}{dx} \frac{du_i}{dx} \Bigg|_{x=x'} \tag{27}$$

这个公式描述了在共轭点 x′处函数 f（x_a）的一阶导数这个导数是由一系列二阶偏

[1] Husserl, Edmund. *Contributions à la théorie du calcul des variation*s. p. 47.
[2] Weierstrass, Karl. *Vorlesungen über Variationsrechnung.* S. 154. S. 163。这里的内容正是来自胡塞尔在魏尔斯特拉斯变分法课程的笔记讲义。
[3] Husserl, Edmund. *Contributions à la théorie du calcul des variation*s. p. 48.

导数组成的二次型与函数 u_h 在 x'处导数的乘积之和。u_h 和 w_h 的性质将帮助解释为何 x' 处泛函的行为会发生变化。由于 u_h 在 x'处的导数不为零而 w_h 的导数为零，我们知道 f（x_a）在共轭点 x'的变化是 u_h 所决定的，那么如果这个一阶导数不为零，它意味着 x' 不是一个局部极值点，在其后不存在最大值[1]。

在讨论了起始点 x_0 的共轭点 x'处 $\delta^2 J = 0$ 的情况，胡塞尔紧接着讨论了二阶变分 $\delta^2 J$ 在 x'附近：$x' - \delta$ 和 $x' + \delta$处的取值符号。这里的δ代表一个非常小的正值它定义了紧邻共轭点的两个点。胡塞尔总结性地指出：

如果 $\delta^2 J > 0$，那么该点可能是局部极小值点；

如果 $\delta^2 J < 0$，那么该点可能是局部极大值点；

那么，当 $x' - \delta$和 $x' + \delta$处，第二变分 $\delta^2 J$ 取值的符号相反意味着：

在 $x' - \delta$处 $\delta^2 J$ 可能是正的（表明可能是局部极小值）；

在 $x' + \delta$可能是负的（表明可能是局部极大值）；

因此，如果，在 $x' - \delta$和 $x' + \delta$处邻域内 $\delta^2 J$ 符号发生变化（即从正变负或从负变正），那么这个点可能是一个鞍点。这样的变化通常表明 x' 点是一个非极值点或鞍点。

胡塞尔通过引入共轭点、高阶变分、行列式分析等概念，建立了判别极值存在的一般性标准，为变分法中关于极值存在条件的理论基础提供了深入的分析和论证。[2]

在当前的对变分法的数学史研究中，克雷格·弗雷泽分析了变分法在 19 世纪的发展和胡塞尔博士论文中三分之一的工作。他认为，胡塞尔的博士论文的研究贡献有三点（1）关于勒让德对最简单变分问题的二阶变分的转换的讨论，以及对雅可比关于二阶变分的关键见解的分析。（2）对迈耶尔在二阶变分研究中的贡献进行了评估。胡塞尔认为迈耶尔在二阶变分研究中取得了决定性的理论突破。他还对迈耶尔的理论进行了重要的改进，并提供了一个通用而简单的方法，用于选择在 迈耶尔的二阶变分转换中所需的常数。（3）证明了在拉格朗日的一般问题中雅可比条件的必要性。弗雷泽同时提出了胡塞尔关于更简单二阶变分讨论的另外一种推导方式。然而，他认为，随着魏尔斯特拉斯在变分法中引入场论方法的发展，胡塞尔基于迈耶尔等人工作的那套旧有扩张方法最终被淘汰。[3]

[1] 在这里省略了胡塞尔通过分析一个特定的行列式 D（x）来判断函数在某点 x 的行为的证明部分。

[2] 胡塞尔在文章结尾提出，他还找到了这个变分计算基本定理的第二种方法，但却并未给出任何说明和证明。

[3] Craig Fraser. “Edmund Husserl’s Contributions to the Second Variation in the Calculus of Variations.” *Serva di due padroni: Saggi di storia della matematica in onore di Umberto Bottazzini*, edited by Alberto Cogliati, Egea, 2019, pp. 263–289.

致谢

胡塞尔说:“我始终是在一个绝望到另一个绝望、一个重振到另一个重振之间生活。最后终于有了一个开端。”[1]过去的一年是充实耕作，也是压抑崩溃的一年。博士论文写作的焦灼和父亲数次病危的煎熬绞缠在一起，论文的最后两章更是在医院的陪护室里写完的。论文答辩后，几乎没有了心力去完成反思和致谢。但是现在，一切都有了良好的开端。如果没有家人的支持、师长的关爱、身边朋友的帮助，这一切都是我独自一人无法忍受和完成的。

感谢我的导师倪梁康先生。先生在学术上深耕细作，察微析理，我每每暗自效仿，都是仰之弥高，钻之弥坚。在生活上则仁和宽厚，给予了我充分的时间和自由去打磨论文，而在关节处又绝对严格地教正我。在过去艰难的一年里，先生一直默默地为我提供着充足的经济支持，使我能够在延毕期间安心于博士论文的写作，而不至于愁困分心。先生在预答辩时候最后对于我的论文的支持和肯定，也让我生发了很大的勇气和力量。希望自己在之后的修改和完善中，谨记耳提面面地谆谆教诲，最终可以提交一份让先生完全满意的现象学工作。其次，感谢我的外导 Mark van Atten 教授，他总是耐心地逐字逐句地为我讲解法语，我们在巴黎高师的院子里的树荫下一起度过了很多个疑义相与析，啤酒相与酌的周末。也要感谢我的另一位外导，胡塞尔档案馆馆长 Dominique Pradelle 教授，在来来往往的邮件中，他总是详尽周密地为我释疑解惑。还要感谢我的硕士导师李朝东先生，他一直站在背后默默地支持着我。

感谢马迎辉老师对我毫不吝啬地批评与赞赏，肯定与否定，这种纯真率直的学术态度让我受用无穷。感谢 Gutland 老师在过去很长的一段时间里教我学习德语，大家常常开怀畅饮，驱赶烦恼。感谢陈亚军老师、王俊老师、Bruno Bentzen、王礼平、李忠伟等老师，他们在浙大哲学学院提供给我一个能思和所思的场域，让浙大哲学在我身上生发。同时，也感谢浙大的诸位行政老师对我们的默默付出。

感谢我的三位爱豆，高松、奚颖瑞，钱立卿。从硕士到博士，这篇并不完满的数学现象学的论文是在他们已经铺就的前路上走出来的。他们一直鼓励我将博士论文进行到底，尤其是高松、奚颖瑞一直以兄长的方式关注着我，支持着我，在我学术动摇

[1] Brief. IX, S. 136.

的时候给我信心和力量。论文初稿完成后，他们又提出了很多重要的修改建议，帮助我进一步思考和深化论文内容。我还要感谢五位盲审专家的悉心评阅与中肯建议，令论文中诸多错漏得以发现并修正，也为论文的整体框架的修改提供了重要指引。

感谢宋文良、冯潇屹、王知飞、许伟、刘思言、吴波成等同门，大家在文献馆里一起读书砥砺，切磋琢磨。我们很多人很多次一起吃着吴山烤鸡看晚霞，怀念那些激辩豪饮，大醉而归的温暖夜晚。感谢漆阳同学认真校读了我的论文，一直给我精神上的支持。感谢我的室友张澍伟、袁洋天在这五年期间的朝夕相伴。

还要论文写作的间隙常常会想起在巴黎的日子。每天骑着自行车穿梭在巴黎清灰米白的街道中，在墓地里散步，在文献中栖身。在巴黎的墓地，死亡从不尖锐。你会看到有人坐在长椅上读书，有猫穿过墓碑间的小径。巴黎的墓地更像是一本敞开的书——肖邦的玫瑰、王尔德的唇印、萨特的沉默……死亡在此不是终点，而是另一种深长的沉思和对话。感谢我的老师和朋友 Claire Ortiz Hill,她毫不保留地为我提供文献资料，每个周末总是让我沉浸伫立于教堂中，聆听巴赫、肖邦、莫扎特、勃拉姆斯、柴可夫斯基……他们也是我的精神密友。怀念从巴黎的时光一直到希腊的日子，我和我的朋友们——余超逸、董梦幡、罗皓雪、滕星妤、樊文朔、俊龙、黛雨老师、蕊姐，Phillip……大家在生活和旅途中患难与共，相互照顾。我们共同拥有一份美好的回忆。